Lösningar till Kontrollskrivning 2021-10-29

Fråga	$x(t) \Leftrightarrow C_n, D_n$			$x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$			$x(t) \Leftrightarrow X(s)$			$x[n] \Leftrightarrow X[z]$			$x[n] \Leftrightarrow X[\Omega]$		
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
Svar	**c)**	**d)**	**b)**	**c)**	**a)**	**d)**	**b)**	**a)**	**a)**	**d)**	**a)**	**b)**	**c)**	**a)**	**c)**

1. Alternativ a) kan direkt avfärdas genom att betrakta den reella signalen $\sin t = -\frac{1}{2j}e^{-jt} + \frac{1}{2j}e^{jt}$, som ju har $D_{-1} = -\frac{1}{2j} \neq \frac{1}{2j} = D_1$. Alternativ d) stämmer inte, vilket visades i en av de första videorna. Av samma anledning blir i allmänhet inte heller signalen i b) periodisk, och det blir då meningslöst att tala om dess fourierseriekoefficienter. Enligt uteslutningsmetoden är alternativ c) korrekt.

   Alternativt kan man konstatera att *speglingsegenskapen* innebär att $x(-t) \Leftrightarrow D_{-n}$, eftersom

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \quad \Longrightarrow \quad x(-t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0(-t)} = \Big/ \text{sätt } m = -n \Big/ =$$
$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_{-m} e^{jm\omega_0 t} = \Big/ \text{byt namn från } m \text{ till } n \Big/ =$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_{-n} e^{jn\omega_0 t}.$$

   Om $x(t) = x(-t)$ måste då $D_n = D_{-n}$, vilket uttrycks i alternativ c).

   Svar: c)

2. För en reellvärd signal gäller $x^*(t) = x(t)$. Eftersom $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$ blir

$$x^*(t) = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \right)^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(D_n e^{jn\omega_0 t} \right)^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n^* e^{-jn\omega_0 t} =$$
$$= \Big/ \text{sätt } m = -n \Big/ = \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_{-m}^* e^{jm\omega_0 t} = \Big/ \text{byt namn från } m \text{ till } n \Big/ =$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_{-n}^* e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} = x(t).$$

   Termvis jämförelse av serierna på sista raden ger $D_{-n}^* = D_n$, dvs alternativ d).

   Svar: d)

3. Här är det enklast att helt enkelt beräkna signalens fourierseriekoefficienter enligt definitionen. Grundvinkelfrekvensen är $\omega_0 = 2\,\text{rad/s}$, och perioden som ger lättast beräkningar är mellan $-\frac{\pi}{2}$ och $\frac{\pi}{2}$, eftersom absolutbeloppet inte behövs där. Vi får

$$D_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot e^{-jn\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} e^{jt} \cdot e^{-j2nt} + \frac{1}{2} e^{-jt} \cdot e^{-j2nt} \right) dt =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{j(1-2n)t} + e^{-j(1+2n)t} \right) dt = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{j(1-2n)t}}{j(1-2n)} + \frac{e^{-j(1+2n)t}}{-j(1+2n)} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{e^{j\pi/2 - jn\pi}}{j(1-2n)} + \frac{e^{-j\pi/2 - jn\pi}}{-j(1+2n)} - \frac{e^{-j\pi/2 + jn\pi}}{j(1-2n)} - \frac{e^{j\pi/2 + jn\pi}}{-j(1+2n)} \right) =$$

$$= \Big/ \begin{matrix} e^{j\pi/2} = j, & e^{-j\pi/2} = -j, \\ e^{jn\pi} = (-1)^n, & e^{-jn\pi} = (-1)^n \end{matrix} \Big/ =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{j(-1)^n}{j(1-2n)} + \frac{-j(-1)^n}{-j(1+2n)} - \frac{-j(-1)^n}{j(1-2n)} - \frac{j(-1)^n}{-j(1+2n)}\right) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{(-1)^n}{1-2n} + \frac{(-1)^n}{1+2n} + \frac{(-1)^n}{1-2n} + \frac{(-1)^n}{1+2n}\right) =$$
$$= \frac{(-1)^n}{\pi}\left(\frac{1}{1-2n} + \frac{1}{1+2n}\right) = \frac{2(-1)^n}{\pi(1-4n^2)}.$$

Detta stämmer överens med alternativ b).

Svar: b)

4. Den som är välbekant med skalningsregeln, dvs $x(at) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|}X\left(\frac{\omega}{a}\right)$ för $a \neq 0$, ser genast att alternativ a) och alternativ c) står i strid med varandra, så att ett av dem måste vara felaktigt. Det räcker då att undersöka det ena påståendet för att avgöra saken, till exempel genom att beräkna

$$\mathscr{F}\{\mathrm{rect}(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-j\omega t}\, dt = \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{e^{-j\omega/2}}{-j\omega} - \frac{e^{j\omega/2}}{-j\omega} =$$
$$= \frac{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}}{j\omega} = \frac{1}{\omega/2} \cdot \frac{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}}{2j} = \frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} = \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

och dra slutsatsen att eftersom a) är korrekt så måste c) vara det felaktiga.

Det går naturligtvis även att istället göra motsvarande beräkning för c) och konstatera att påståendet inte stämmer:

$$\mathscr{F}\left\{\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right) e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-1}^{1} e^{-j\omega t}\, dt = \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_{-1}^{1} = \frac{e^{-j\omega}}{-j\omega} - \frac{e^{j\omega}}{-j\omega} =$$
$$= \frac{e^{j\omega} - e^{-j\omega}}{j\omega} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{e^{j\omega} - e^{-j\omega}}{2j} = \frac{\sin(\omega)}{\omega/2} = 2\,\mathrm{sinc}(\omega) \neq \mathrm{sinc}(\omega).$$

För den som gillar uteslutningsmetoden går det att utesluta alternativ a) enligt beräkningen ovan, alternativ b) genom att konstatera att integralen måste bli noll för $t < 0$ och ett för $t > 0$, och alternativ d) genom att beräkna inverstransformen

$$\mathscr{F}^{-1}\{2\pi\delta(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega)\, d\omega = 1.$$

Oavsett metod blir slutsatsen densamma, att alternativ c) är det felaktiga.

Svar: c)

5. Genom att utgå från formeln för inversa fouriertransformen,

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega,$$

ser vi att

$$\tilde{x}(t) = x''(t) = \frac{d^2}{dt^2}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{X(\omega)\, e^{j\omega t}\right\} d\omega =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\,(j\omega)^2\, e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{X}(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega.$$

Detta innebär att $\tilde{X}(\omega) = (j\omega)^2 X(\omega) = -\omega^2 X(\omega)$, som uttrycks i alternativ a).

Svar: a)

6. Det enklaste i det här fallet är antagligen att beräkna fouriertransformen enligt definitionen, dvs

$$\begin{aligned}
X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-2}^{0} -1\, e^{-j\omega t}\, dt + \int_{0}^{2} 1\, e^{-j\omega t}\, dt = \\
&= \left[-\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right]_{-2}^{0} + \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right]_{0}^{2} = \frac{1}{j\omega}\left[e^{-j\omega t} \right]_{-2}^{0} - \frac{1}{j\omega}\left[e^{-j\omega t} \right]_{0}^{2} = \\
&= \frac{1}{j\omega}\big(1 - e^{j2\omega} - e^{-j2\omega} + 1\big) = 2 \cdot \frac{1-\cos(2\omega)}{j\omega} = 2 \cdot \frac{1 - (\cos^2\omega - \sin^2\omega)}{j\omega} = \\
&= 2 \cdot \frac{1 - \cos^2\omega + \sin^2\omega}{j\omega} = 2 \cdot \frac{2\sin^2\omega}{j\omega} = -4j\sin(\omega) \cdot \frac{\sin\omega}{\omega} = -4j\sin(\omega)\,\mathrm{sinc}(\omega).
\end{aligned}$$

Rätt svarsalternativ är alltså d).

En alternativ lösningsgång är att använda sambandet $\mathscr{F}\big\{\mathrm{rect}(\frac{t}{2})\big\} = 2\,\mathrm{sinc}(\omega)$, som visades i uppgift 4, tillsammans med sambandet $\mathscr{F}\{x(t-t_0)\} = e^{-j\omega t_0}\mathscr{F}\{x(t)\}$ för tidsförskjutning. Vi kan då beräkna

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}\{x(t)\} &= \mathscr{F}\left\{ -\mathrm{rect}\left(\frac{t+1}{2}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{t-1}{2}\right) \right\} = \\
&= \mathscr{F}\left\{ -\mathrm{rect}\left(\frac{t+1}{2}\right) \right\} + \mathscr{F}\left\{ \mathrm{rect}\left(\frac{t-1}{2}\right) \right\} = \\
&= -e^{j\omega}\mathscr{F}\left\{ \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right) \right\} + e^{-j\omega}\mathscr{F}\left\{ \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right) \right\} = \\
&= -\big(e^{j\omega} - e^{-j\omega}\big)\mathscr{F}\left\{ \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right) \right\} = \\
&= -2j\sin(\omega)\mathscr{F}\left\{ \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right) \right\} = -4j\sin(\omega)\,\mathrm{sinc}(\omega).
\end{aligned}$$

Svar: d)

7. Påstående a) skulle göra laplacetransformen oanvändbar för dubbelsidiga signaler, vilket förstås är helt fel.

   Påstående b) är korrekt, och uttrycker *speglingsegenskapen* (tidsskalning med skalfaktorn -1).

   Påstående c) är fel; exempelvis är signalen $x(t) = e^t u(t)$ laplacetransformerbar, men inte absolutintegrerbar.

   Alternativ d) skulle ha varit korrekt om det hade stått ”imaginära axeln” istället ”enhetscirkeln”, men det som står stämmer alltså inte.

   Svar: b)

8. Den enkelsidiga laplacetransformen tar, på grund av undre gränsen i integralen, endast med den delen av $x(t)$ där $t \geq 0$. Den tidsförskjutna signalen $x(t-t_0)$ får även med den delen av $x(t)$ där $-t_0 \leq t < 0$, vilket i allmänhet ändrar värdet på integralen. Exempelvis har signalen $x(t) = u_0(-t)$ den enkelsidiga laplacetransformen $X(s) \equiv 0$, medan

$$\mathscr{L}_1\{x(t-t_0)\} = \int_{0^-}^{\infty} u_0\big(-(t-t_0)\big)\, e^{-st}\, dt = \int_{0^-}^{t_0} e^{-st}\, dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_{0^-}^{t_0} = \frac{1-e^{-st_0}}{s} \neq 0.$$

   Alternativ a) är alltså felaktigt.

Alternativ b) stämmer, eftersom det uttrycker regeln för *tidsskalning*, som visas genom beräkningen

$$\mathscr{L}_{\mathrm{I}}\{x(at)\} = \int_{0^-}^{\infty} x(at)\, e^{-st}\, dt = \Big/ \begin{matrix} \tilde{t} = at \\ d\tilde{t} = a\, dt \end{matrix} \Big/ = \int_{0^-}^{\infty} x(\tilde{t})\, e^{-s\tilde{t}/a} \frac{d\tilde{t}}{a} =$$

$$= \Big/ \text{byt namn från } \tilde{t} \text{ till } t \Big/ = \frac{1}{a} \int_{0^-}^{\infty} x(t)\, e^{-st/a}\, dt = \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right),$$

som bara gäller för $a > 0$ (eftersom $a < 0$ vänder på tidsaxeln).

Alternativ c) stämmer också, eftersom

$$\mathscr{L}_{\mathrm{I}}\{x^*(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} x^*(t)\, e^{-st}\, dt = \left(\int_{0^-}^{\infty} x^*(t)\, e^{-st}\, dt \right)^{**} = \left(\int_{0^-}^{\infty} \left(x^*(t)\, e^{-st}\, dt \right)^* \right)^* =$$

$$= \left(\int_{0^-}^{\infty} x^{**}(t) \left(e^{-st}\right)^* (dt)^* \right)^* = \Big/ s = \sigma + j\omega \Big/ =$$

$$= \left(\int_{0^-}^{\infty} x(t) \left(e^{-(\sigma+j\omega)t}\right)^* dt \right)^* = \left(\int_{0^-}^{\infty} x(t)\, e^{-(\sigma-j\omega)t}\, dt \right)^* =$$

$$= \left(\int_{0^-}^{\infty} x(t)\, e^{-s^* t}\, dt \right)^* = X^*(s^*).$$

Slutligen gäller även alternativ d), vilket visas medelst partialintegration:

$$\mathscr{L}_{\mathrm{I}}\{x'(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} x'(t)\, e^{-st}\, dt = \Big[x(t)\, e^{-st} \Big]_{0^-}^{\infty} - \int_{0^-}^{\infty} x(t)\, (-s) e^{-st}\, dt =$$

$$= 0 - x(0^-) + s \int_{0^-}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt = s\mathscr{L}_{\mathrm{I}}\{x(t)\} - x(0^-).$$

Det felaktiga alternativet är alltså alternativ a).

Svar: a)

9. Konvergensområdet $-2 < \operatorname{Re} s < 0$ talar om för oss att eventuella exponentialfunktioner av typen e^{-2t} måste vara *högersidiga*, och att eventuella exponentialfunktioner av typen $e^{0t} = 1$ måste vara *vänstersidiga*. (Konvergensen påverkas inte av eventuella polynom framför exponentialfunktionerna.) Detta utesluter genast alternativ b) och alternativ d).

   För att avgöra om det rätta alternativet är a) eller c) kan vi transformera det ena av dem. Med fördel väljer vi det lättaste uttrycket, vilket är det som anges i c). Dess laplacetransform blir

$$\mathscr{L}\left\{3e^{-2t}u(t) + 2u_0(-t)\right\} = \frac{3}{s+2} - \frac{2}{s} = \frac{3s - 2(s+2)}{s(s+2)} = \frac{s-4}{s(s+2)},$$

   med konvergensområdet $-2 < \operatorname{Re} s < 0$, men är inte rätt uttryck. Rätt alternativ är därför a).

   Vi kan förstås även transformera signalen i a), vilket ger oss

$$\mathscr{L}\left\{6e^{-2t}u(t) + 2t\, u_0(-t)\right\} = \frac{6}{s+2} - \frac{2}{s^2} = \frac{6s^2 - 2(s+2)}{s^2(s+2)} = \frac{6s^2 - 2s - 4}{s^2(s+2)},$$

   som också har konvergensområdet $-2 < \operatorname{Re} s < 0$, och som stämmer med det sökta uttrycket.

   Ytterligare en möjlighet är att partialbråksuppdela och inverstransformera, vilket blir som föregående uträkning fast baklänges.

   Svar: a)

10. Signalen $x[n] = 2^n u[n]$ har en z-transform

$$X[z] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(2z^{-1}\right)^n = \frac{1}{1-2z^{-1}} = \frac{z}{z-2} \quad \text{för } 2 < |z|,$$

men saknar fouriertransform. Alternativ a) är alltså inte korrekt.

Signalen $x[n] \equiv 1$ saknar z-transform, men har fouriertransformen

$$\mathscr{F}\{1\} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k \cdot 2\pi),$$

vilket lättast visas genom att beräkna inverstransformen. Alternativ b) är alltså inte korrekt.

Om det inte finns någon singulär punkt alls finns det ju *högst* en på avståndet R_0 och *högst* en på avståndet R_1 från origo, men det finns ingenting som begränsar konvergensområdet. Alternativ c) är alltså felaktigt.

Det korrekta alternativet är d).

Svar: d)

11. Alternativ a) är korrekt, eftersom

$$\begin{aligned} X\left[\frac{1}{z}\right] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left(\frac{1}{z}\right)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^n = \Big/ n = -\tilde{n} \Big/ = \\ &= \sum_{\tilde{n}=-\infty}^{\infty} x[-\tilde{n}] z^{-\tilde{n}} = \Big/ \text{byt namn från } \tilde{n} \text{ till n} \Big/ = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n] z^{-n} = \mathscr{Z}\{x[-n]\}. \end{aligned}$$

Svar: a)

12. Alternativ a) kan direkt uteslutas eftersom konvergensområdet inte passar med den antikausala termen $(-6)^n u_0[-n]$ som finns i signalen, men resterande alternativ kräver mer ingående undersökning.

Om vi z-transformerar signalen erhåller vi

$$\begin{aligned} X[z] &= \frac{z}{z-\frac{1}{3}} - \frac{z}{z+6} = \frac{3z}{3z-1} - \frac{z}{z+6} = \frac{3z(z+6) - z(3z-1)}{(3z-1)(z+6)} = \\ &= \frac{3z^2+18z-3z^2+z}{3z^2-z+18z-6} = \frac{19z}{3z^2+17z-6}, \end{aligned}$$

vilket anges i alternativ b).

Svar: b)

13. Signalens amplitudspektrum har ett lokalt maximum för där motsvarande punkt på enhetscirkeln ligger närmast en pol. Signalens z-transform *kan* ha poler där nämnarpolynomet är noll. I det här fallet har nämnarpolynomet sina tre nollställen i $z = \frac{2}{3} e^{j \cdot k \cdot 2\pi/3}$ för $0 \le k < 3$. Signalens z-transform blir därför

$$X[z] = \frac{z-\frac{2}{3}}{z^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^3} = \frac{z-\frac{2}{3}}{\left(z-\frac{2}{3}\right)\left(z-\frac{2}{3}e^{j2\pi/3}\right)\left(z-\frac{2}{3}e^{j4\pi/3}\right)} = \frac{1}{\left(z-\frac{2}{3}e^{j2\pi/3}\right)\left(z-\frac{2}{3}e^{j4\pi/3}\right)},$$

så den skenbara polen i $z = \frac{2}{3}$ kommer inte ”lyfta” amplitudspektrumet. Av de angivna alternativen är det bara för $\Omega = \dfrac{2\pi}{3}$ rad som det finns en pol. Rätt svar är alltså alternativ c).

Svar: c)

14. Eftersom tid och frekvens skalas *omvänt* är d) felaktigt.

Att c) är felaktigt inses till exempel genom att betrakta den reella signalen $\delta[n-1]$, då

$$\mathscr{F}\left\{\delta[n-1]\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n-1]\, e^{-j\Omega n} = e^{-j\Omega} \notin \mathbb{R}.$$

Vi erinrar oss om egenskapen för tidsskift, dvs

$$\mathscr{F}\{x[n-n_0]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-n_0]\, e^{-j\Omega n} = \Big/ m = n - n_0 \Big/ = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\, e^{-j\Omega(m+n_0)} =$$
$$= e^{-j\Omega n_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\, e^{-j\Omega m} = e^{-j\Omega n_0} X[\Omega].$$

Med detta färskt i minnet kan vi fouriertransformera alternativ a) enligt

$$\mathscr{F}\left\{\frac{x[n+1]+x[n-1]}{2}\right\} = \frac{e^{j\Omega} X[\Omega] + e^{-j\Omega} X[\Omega]}{2} = X[\Omega] \cdot \frac{e^{j\Omega} + e^{-j\Omega}}{2} = X[\Omega]\cos\Omega,$$

vilket visar att a) är korrekt.

Motsvarande beräkning kan göras för alternativ b), men det saknas ett j i nämnaren för att det skall gå ihop, så b) är felaktigt.

Svar: a)

15. Signalen i a) är inte fouriertransformerbar, och kan därför uteslutas. Övriga signaler är både fouriertransformerbara och z-transformerbara.

Polerna för z-transformen av signalen i b) ligger i $z = 0.5$ respektive $z = 2$, och det finns alltså ingen pol som ”lyfter” amplitudspektrumet vid $\Omega = \pm\pi$ rad, så vi kan utesluta b) också.

Det står alltså mellan c) och d), som endast skiljer på ett minustecken. För alternativ d) har vi

$$X[\Omega] = \mathscr{F}\left\{0.5^n\, u[n] + (-0.5)^n\, u[n]\right\} = \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega} - 0.5} + \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega} + 0.5},$$

vilket ger $\left|X[0]\right| = \left|\frac{1}{1-0.5} + \frac{1}{1+0.5}\right| = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3} \neq \frac{4}{3}$. Alternativ d) är alltså felaktigt, och kvar finns enbart alternativ c).

Svar: c)