Föreläsning 1: Fourierserier

I kursen skall vi ägna oss åt olika typer av transformer, som kan användas för att analysera signaler och system. De används även för att konstruera / designa system, eller för att utföra beräkningar!

Bas för Fourierserier $\{e^{jn\omega_0 t}\}$

Tidsdomän (alt. rumsdomän)	Frekvensdomän (alt. transformdomän)

Transform ("basbyte") →

Signaler / funktioner
- Tidsdiskreta vs tidskontinuerliga
- Periodiska vs icke-periodiska
- . . .

$x(t) = x(t+T_0)$

Transformer / spektrum (också funktioner!)
- Diskreta vs kontinuerliga

← Invers transform

Vilka signaler är periodiska?

- Sinussignaler och cosinussignaler

$\sin(\omega t+\theta)$ och $\cos(\omega t+\theta)$
är periodiska med periodtid $T=\frac{2\pi}{\omega}$

- Summor av sinussignaler och cosinussignaler,
om ALLA ingående vinkelfrekvenser är heltalsmultiplar
av en gemensam grundvinkelfrekvens ω_0, dvs

(VIDEO 1)

$\omega_n = k_n\omega_0$, där alla $k_n \in \mathbb{Z}$
och där $\omega_0 = SGD(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots)$

- Omvänt: (Fouriers idé): Alla periodiska signaler är av ovanstående typ! NEJ, TYVÄRR!
Med vissa ytterligare krav (Dirichlets konvergensvillkor) och rätt tolkning av
"summa" (dvs även om serier tillåts) stämmer det.

Exempel

Avgör huruvida signalen $f(t)=2\sin(\overset{\omega_1 t}{12\pi\, t / 5})-3\cos(\overset{\omega_2 t}{3\pi\, t / 20})$ är periodisk, och bästäm i så fall dess grundperiodtid.

$$\omega_1 = \frac{12\pi}{5} = 2\cdot 2\cdot 3\pi\cdot\frac{1}{5}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{1}{2} \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = \frac{3\pi}{20} = 3\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} \text{ rad/s}$$

Periodisk om $\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{Q}$! $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{12\cancel{\pi}/5}{3\cancel{\pi}/20} \in \mathbb{Q}$

Grundvinkelfrekvens $\omega_0 = SGD(\omega_1, \omega_2) = 3\pi\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} = \frac{3\pi}{20}$ rad/s

Grundperiodtiden är $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\cancel{\pi}}{3\cancel{\pi}/20}\ s = \frac{40}{3}\ s$

Fourierserier (VIDEO 2 & 3)

Euler: $\cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$

Trigonometrisk form	Kompakt form	Exp.-form (komplex form)
$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) =$	$C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) =$	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$

$a_0 = C_0 = D_0$ = medelvärdesnivån (över en period)

$C_n \cdot \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$ = delton nr n (n=1 ger grundtonen, n>1 ger övertoner)

$$D_n = \begin{cases} C_n/2 \cdot e^{j\theta_n} & n > 0 \\ C_0 & n = 0 \\ D^*_{-n} & n < 0 \end{cases}$$

$C_n = 2|D_n| \quad n \neq 0$ ampl. spektrum

$\theta_n = \arg D_n$ fasspektrum

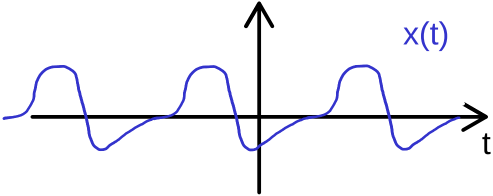
$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} \, dt$$

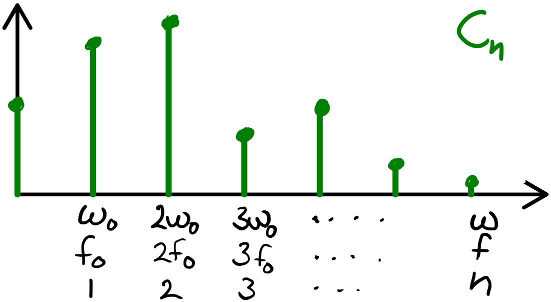
(Enkelsidigt)

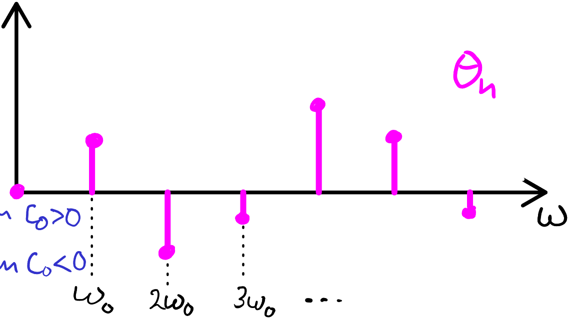
Frekvensspektrum

Beskriver amplituden och fasen hos varje

delton $C_n \cdot \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$





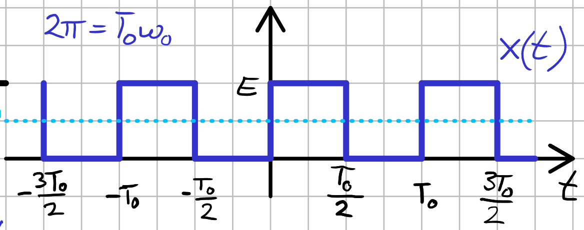


$\theta_0 = 0$ om $C_0 > 0$

$\theta_0 = \pm\pi$ om $C_0 < 0$

Fyrkantsvågens spektrum

$2\pi = T_0\omega_0$



$$D_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt = \frac{E}{2}$$

(Kan vi avläsa medelnivån så slipper vi integrera!)

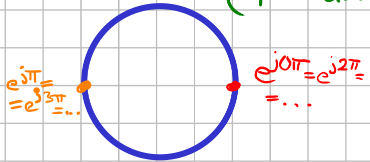
$$D_n = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-jn2\pi t/T_0}\,dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} E\,e^{-jn2\pi t/T_0}\,dt =$$

$$= \frac{E}{T_0}\left[\frac{e^{-jn2\pi t/T_0}}{-jn2\pi/T_0}\right]_0^{T_0/2} = \frac{E}{T_0}\left(\frac{e^{-jn\pi}-1}{-jn2\pi/T_0}\right) =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{jämna } n \neq 0 \\ \frac{E}{T_0}\cdot\frac{-2}{-jn2\pi/T_0} & \text{udda } n \quad \left(= \frac{E}{jn\pi} = \frac{-jE}{n\pi}\right) \end{cases}$$

åter

$$\cos(n\pi) = \begin{cases} 1 & n \text{ jämn} \\ -1 & n \text{ udda} \end{cases}$$



$$e^{-j\pi n} = \begin{cases} 1 & \text{om } n \text{ jämn} \\ -1 & \text{om } n \text{ udda} \end{cases}$$

(Forts. av)

Fyrkantsvågens spektrum

$$C_0 = D_0$$

$$n \neq 0: \quad C_n = 2|D_n| = \begin{cases} 2\left|\dfrac{-jE}{n\pi}\right| = \dfrac{2E}{n\pi} & \text{udda } n \\ 0 & \text{jämna } n \end{cases}$$

Rita!

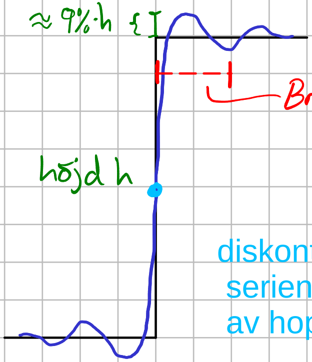
$$\theta_n = \arg D_n = \begin{cases} \arg\left\{\dfrac{-jE}{n\pi}\right\} = -\pi/2 & \text{udda } n \\ \arg 0 = \text{odefinierad!} & \text{jämna } n \end{cases}$$

(kan definieras att vara noll)

Java-demo: www.falstad.com/fourier

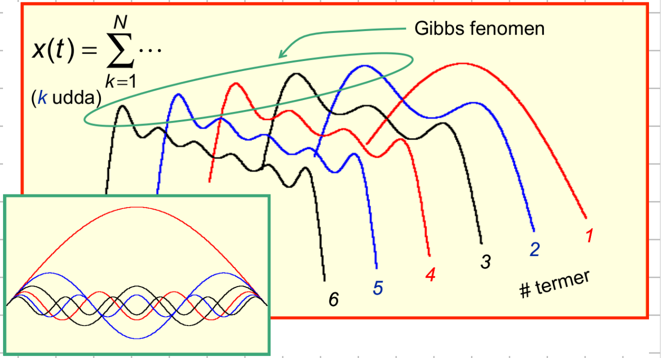
Gibbs fenomen

Approximation med N termer



Bredd: $\frac{T_N}{2} = \frac{2\pi/\omega_N}{2} = \frac{\pi}{\omega_N} \to 0$

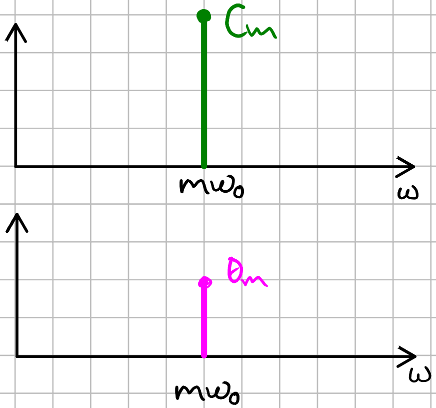
diskontinuitet:
serien går mot "mitten"
av hoppet!



(Dubbelsidigt)

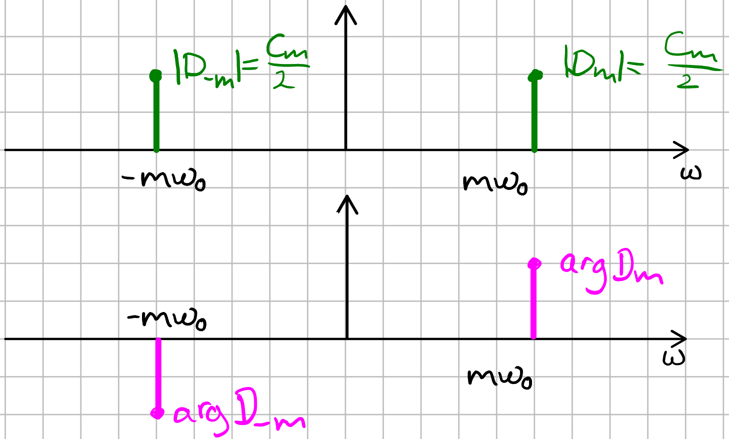
Frekvensspektrum

Delton m: $C_m \cdot \cos(m\omega_0 t + \theta_m) = \overbrace{\frac{C_m}{2} e^{j\theta_m}}^{=D_m} \cdot e^{jm\omega_0 t} + \overbrace{\frac{C_m}{2} e^{-j\theta}}^{=D_m^* = D_{-m}} \cdot e^{-jm\omega_0 t}$



ampl.

fas



Fortsättning 2020-09-04

Några egenskaper

$x(t) \longleftrightarrow D_n$

1) Tidsförskjutning

$$\tilde{x}(t) = x(t-t_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0(t-t_0)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{D_n e^{-jn\omega_0 t_0}}_{\tilde{D}_n} \cdot e^{jn\omega_0 t}$$

$$\Rightarrow \quad x(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-jn\omega_0 t_0} D_n$$

Vill ha $e^{jn\omega_0 t}$

2) Skalning $(a>0)$

$$\tilde{x}(t) = x(at) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\overbrace{\omega_0 a}^{\tilde{\omega}_0} t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\tilde{\omega}_0 t} \Rightarrow x(at) \longleftrightarrow D_n$$

$$\boxed{T_{ny} = \frac{T_0}{a}}$$

Slutsats: Fourierkoefficienterna beror endast av "formen" på signalen!

Exempel: $x(3t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\tilde{\omega}_0 t}$, $\tilde{\omega}_0 = 3\omega_0$ observera! $T_{ny} = \frac{T_0}{a} = \frac{T_0}{3}$

(Lite överkurs!)

Tolkning som basbyte

Periodisk signal:

$$x(t) = \int_{T_0} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau$$

OBS: Integralen är över en period som innehåller t!

koord. "bas"

byt "från" basen

till basen $\{e^{jn\omega_0 t}\}$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$$

Skalärprodukt:

$$\langle f(t) | g(t) \rangle = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} f^*(t)\,g(t)\,dt$$

D_n-integralen:

$$D_n = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\,e^{-jn\omega_0 t}\,dt = \langle e^{jn\omega_0 t} | x(t) \rangle$$

Obs: $\langle e^{jm\omega_0 t} | e^{jn\omega_0 t} \rangle =$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{T_0} e^{j(n-m)\omega_0 t}\,dt = \begin{cases} 1 & \text{om } m=n \\ \frac{1}{T_0}\left[\frac{e^{j(n-m)\omega_0 t}}{j(n-m)\omega_0}\right]_0^{T_0} = 0 & \text{om } n \neq m \end{cases}$$

ON-bas! Skalärprodukten ger "koordinaterna" (fourierkoefficienterna)!