Föreläsning 1: Fourierserier

I kursen skall vi ägna oss åt olika typer av transformer,
som kan användas för att analysera signaler och system.
De används även för att konstruera / designa system,
eller för att utföra beräkningar!

Bas för Fourierserier: $\{e^{jn\omega_0 t}\}$

Tidsdomän (alt. rumsdomän)	Frekvensdomän (alt. transformdomän)
Signaler / funktioner	Transformer / spektrum (också funktioner!)
- Tidsdiskreta vs tidskontinuerliga	- (Frekvens)diskreta vs kontinuerliga
- Periodiska vs icke-periodiska	- Periodiska vs icke-periodiska
- . . . $x(t) = x(t+T_0)$	- . . .

Transform ("basbyte") →

← Invers transform

Vilka signaler är periodiska?

- Sinussignaler och cosinussignaler

$\sin(\omega_0 t+\theta)$ och $\cos(\omega_0 t+\theta)$ är periodiska med periodtid $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

- Summor av sinussignaler och cosinussignaler, om ALLA ingående vinkelfrekvenser är heltalsmultiplar av en gemensam grundvinkelfrekvens ω_0, dvs

(VIDEO 1)

$\omega_n = k_n \omega_0$, där alla $k_n \in \mathbb{Z}$

och där $\omega_0 = SGD(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots)$

- Omvänt: (Fouriers idé): Alla periodiska signaler är av ovanstående typ! NEJ, TYVÄRR!
  Med vissa ytterligare krav (Dirichlets konvergensvillkor) och rätt tolkning av "summa" (dvs om även serier tillåts) stämmer det.

konvergensfrågor!

Exempel

$\omega_1 t$ $\omega_2 t$

Avgör huruvida signalen f(t)=2sin(12π t / 5)-3cos(3π t / 20) är periodisk, och bästäm i så fall dess grundperiodtid.

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{12\cancel{\pi}/5}{3\cancel{\pi}/20} \in \mathbb{Q}$$ alltså periodisk!

$$\begin{cases} \omega_1 = 2\cdot 2\cdot 3\pi \cdot \frac{1}{5}\cdot 2\cdot \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{1}{2} \text{ rad/s} \\ \omega_2 = 3\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} \text{ rad/s} \end{cases} \Rightarrow \omega_0 = SGD(\omega_1, \omega_2) = \frac{3\pi}{20} \text{ rad/s}$$

Grundperiodtid: $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{40}{3}$ s

Fourierserier (VIDEO 2 & 3)

Trigonometrisk form | Kompakt form | Exp.-form (komplex form)

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$$

$a_0 = C_0 = D_0$ = medelvärdesnivån (över en period)

$C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$ = delton nr n (n=1 ger grundtonen, n>1 ger övertoner)

$$D_n = \begin{cases} C_n/2 \cdot e^{j\theta_n} & n>0 \\ C_0 & n=0 \\ D_{-n}^{*} & n<0 \end{cases}$$

$C_n = 2|D_n|$ $n \neq 0$ ampl. spektrum

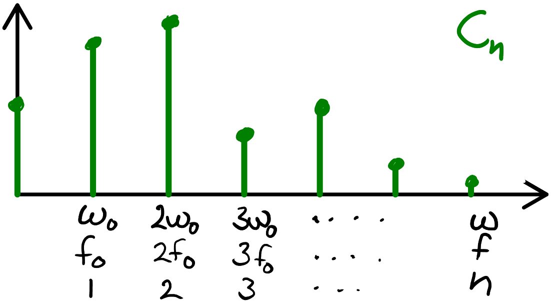
$\theta_n = \arg D_n$ fasspektrum

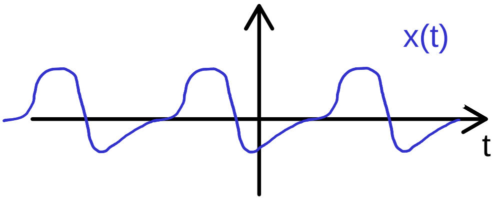
$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} \, dt$$

(Enkelsidigt)

Frekvensspektrum

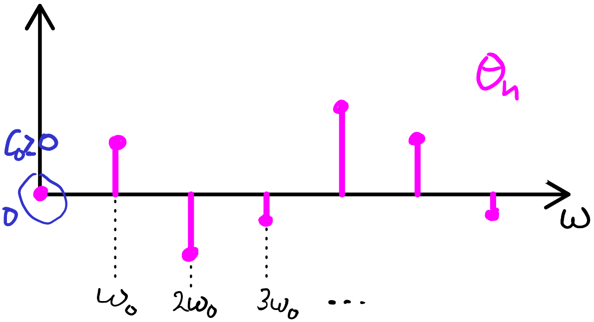
Beskriver amplituden och fasen hos varje delton $C_n \cdot \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$





$\theta_0 = 0$ om $C_0 \geq 0$

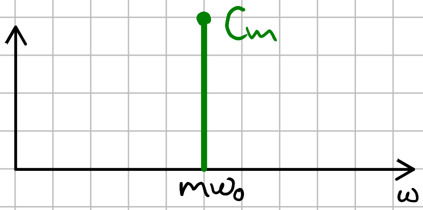
$\theta_0 = \pm\pi$ om $C_0 < 0$

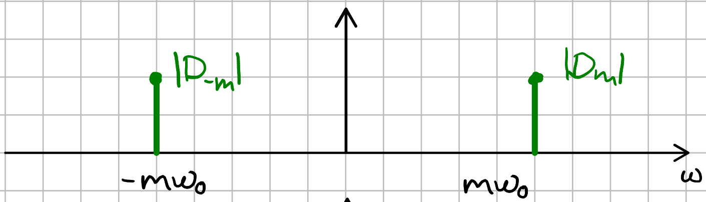


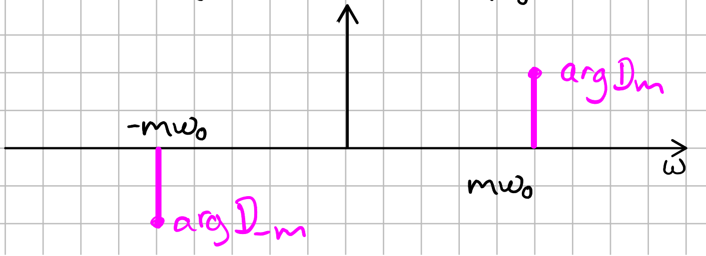
(Dubbelsidigt)

Frekvensspektrum

Delton m: $C_m \cos(m\omega_0 t + \theta_m) = \frac{C_m}{2} e^{j(m\omega_0 t + \theta_m)} + \frac{C_m}{2} e^{-j(m\omega_0 t + \theta_m)}$





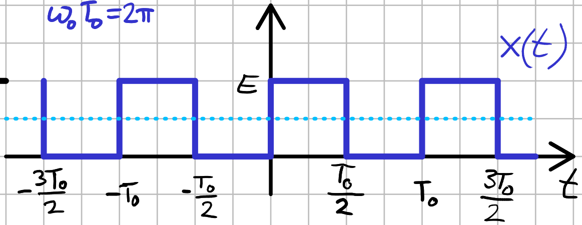


Fyrkantsvågens spektrum

$$D_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\underbrace{e^{-j0\omega_0 t}}_{=1}dt = \frac{E}{2}$$

Avläs medelnivån! $\frac{E}{2}$

$\omega_0 T_0 = 2\pi$

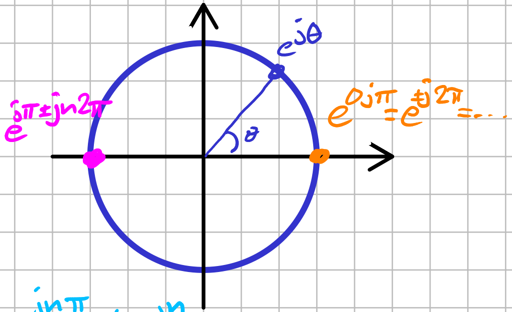


Om $n \neq 0$:

$$D_n = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} E\, e^{-jn\omega_0 t} =$$

$$= \frac{E}{T_0}\left[\frac{e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0}\right]_0^{T_0/2} = \frac{E}{T_0}\cdot\frac{e^{-jn\overbrace{\omega_0 T_0/2}^{\pi}}-1}{-jn\underbrace{2\pi/T_0}_{\omega_0}} =$$

$$= \frac{E}{\cancel{T_0}}\cdot\frac{e^{-jn\pi}-1}{-jn2\pi/\cancel{T_0}} = \frac{E}{jn2\pi}\left(1-(-1)^n\right) = \begin{cases}\frac{2E}{j2\pi n} & n \text{ udda}\\ 0 & n \text{ jämnt}, \; n \neq 0\end{cases}$$

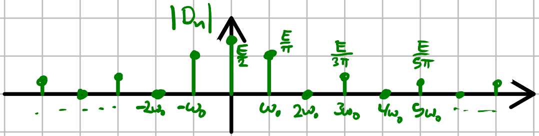


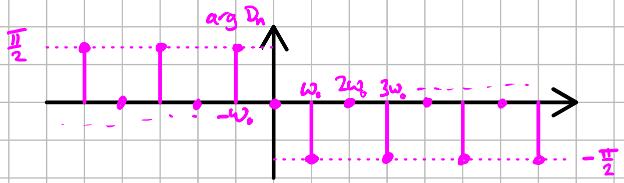
$$e^{jn\pi} = (-1)^n$$

(Forts. av)

Fyrkantsvågens spektrum

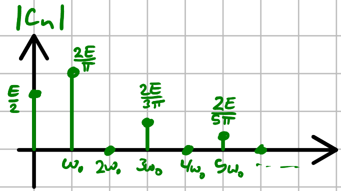
$$D_n = \begin{cases} \frac{E}{2} & \text{för } n=0 \\ 0 & \text{för jämna } n \neq 0 \\ \frac{E}{jn\pi} & \text{för udda } n \end{cases} = \frac{-jE}{n\pi}$$

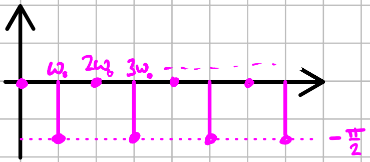




$C_0 = D_0$

Om $n \neq 0$: $C_n = 2|D_n| = \begin{cases} \frac{2E}{n\pi} & \text{för udda } n \\ 0 & \text{för jämna } n \end{cases}$

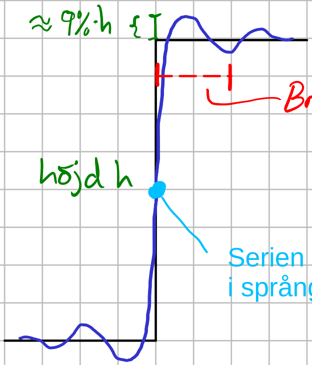




Java-demo: www.falstad.com/fourier

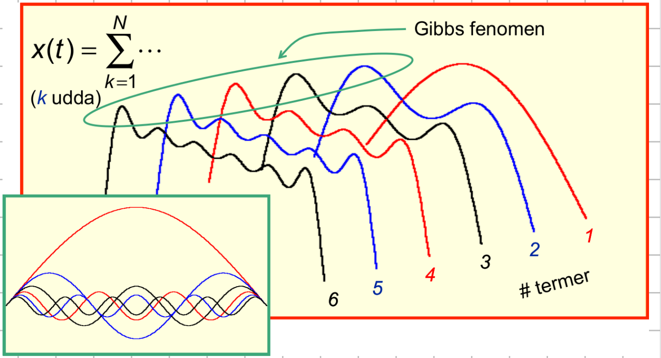
Gibbs fenomen

Approximation med N termer



Bredd: $\frac{T_N}{2} = \frac{2\pi/\omega_N}{2} = \frac{\pi}{\omega_N} \to 0$

Serien antar medelvärdet i språngdiskontinuiteten!



Några egenskaper

$x(t) \longleftrightarrow D_n$

1) Tidsförskjutning

$$\tilde{x}(t) = x(t-t_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0(t-t_0)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{D_n e^{-jn\omega_0 t_0}}_{\tilde{D}_n} \cdot e^{jn\omega_0 t}$$

$$\Rightarrow \quad x(t-t_0) \longleftrightarrow D_n e^{-jn\omega_0 t_0}$$

2) Skalning

$(a>0)$

$$\tilde{x}(t) = x(at) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overset{\tilde{D}_n}{D_n} e^{jn\overset{\tilde{\omega}_0}{\omega_0 a} t}$$

Slutsats: Fourierseriekoefficienterna ändras inte, men grundperiodtiden ändras!

(Fortsättning av)

Några egenskaper

$$x(t) \longleftrightarrow D_n$$

$$v(t) \longleftrightarrow \hat{D}_n$$

3) Multiplikation

$$\tilde{x}(t) = x(t)v(t) = \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} D_m e^{jm\omega_0 t}\right)\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{D}_k e^{jk\omega_0 t}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_m e^{jm\omega_0 t} \hat{D}_k e^{jk\omega_0 t} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{\underbrace{m=-\infty}_{n-k=-\infty}}^{\infty} D_m \hat{D}_k e^{j\underbrace{(m+k)}_{=n}\omega_0 t} = \left/ \begin{matrix} n=m+k \\ k=n-m \end{matrix} \right/ = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_m \hat{D}_{n-m} e^{jn\omega_0 t}$$

4) Derivering

$$\tilde{x}(t) = x'(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{D_n jn\omega_0}_{\tilde{D}_n} e^{jn\omega_0 t}$$

$$\Rightarrow \quad x'(t) \longleftrightarrow D_n jn\omega_0$$