Föreläsning 2+3: Fouriertransformen

I kursen skall vi ägna oss åt olika typer av transformer,
som kan användas för att analysera signaler och system.
De används även för att konstruera / designa system,
eller för att utföra beräkningar!

Tidsdomän (alt. rumsdomän)	Frekvensdomän (alt. transformdomän)
$\xrightarrow{\text{Transform ("basbyte")}}$	
Signaler / funktioner	Transformer / spektrum (också funktioner!)
- Tidsdiskreta vs tidskontinuerliga	- (Frekvens)diskreta vs kontinuerliga
- Periodiska vs icke-periodiska	- Periodiska vs icke-periodiska
- . . .	- . . .
$\xleftarrow{\text{Invers transform}}$	

Några egenskaper

1) Tidsförskjutning

2) Tidsskalning med a>0

(Fortsättning)

Några egenskaper

3) Frekvensförskjutning

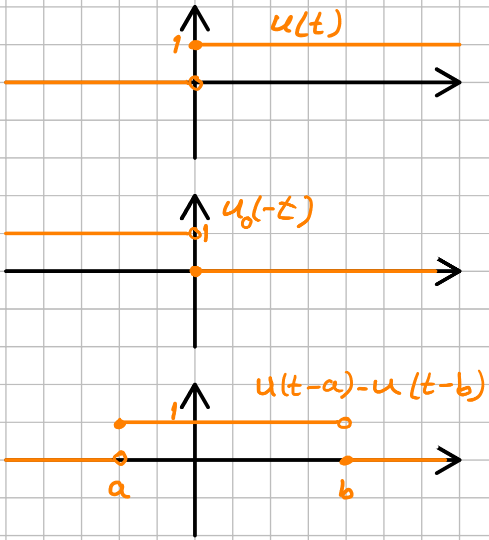
4) Derivering

5) Dualitet ("symmetri")

6) Konjugering

Enhetssteget u(t)

Definition:

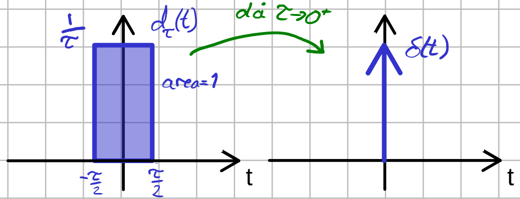


"unit impulse", "Dirac delta", ...

Diracimpulsen $\delta(t)$

"Funktion" med egenskapen

$$\begin{cases} \delta(t) = 0 \quad \forall t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1 \end{cases}$$



Derivata av enhetssteget:

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \Leftrightarrow u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau$$

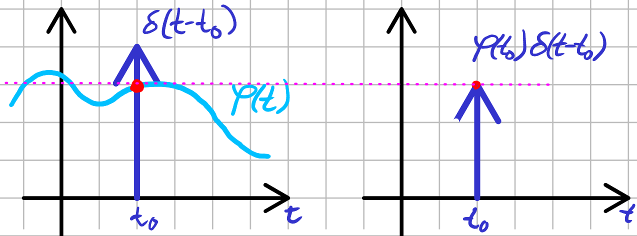
Mer formell definition (distributionsbegreppet):

$\delta(t)$ definieras av hur den fungerar tillsammans med andra funktioner under integraltecken:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\,\varphi(t)\,dt = \varphi(t_0)$$ "sampling / sifting property"

Tolkning utanför integraltecken:

$$\varphi(t)\,\delta(t-t_0) = \varphi(t_0)\,\delta(t-t_0)$$



(forts. av)

Diracimpulsen $\delta(t)$

Fouriertransformen och Diracimpulsen

(Lite överkurs!)

Tolkning som basbyte mellan ON-baser

Funktionerna rect & sinc

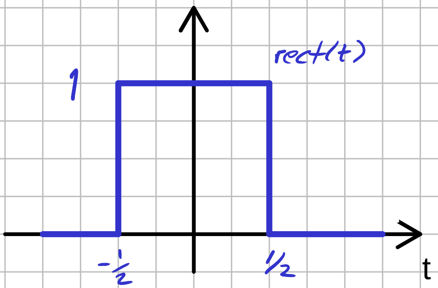
- $\Pi(t) = \mathrm{rect}(t) = u(t+\tfrac{1}{2}) - u(t-\tfrac{1}{2})$ "unit gate function"

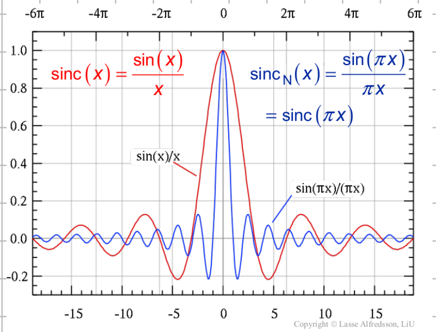
- $\mathrm{sinc}\, t = \dfrac{\sin t}{t}$ $(=0 \text{ då } t = n\pi)$

  $\mathrm{sinc}_N\, t = \mathrm{sinc}(\pi t)$ $(=0 \text{ då } t = n)$

- $\mathcal{F}\{\mathrm{rect}(\frac{t}{\tau})\} = \tau\, \mathrm{sinc}(\frac{\omega\tau}{2})$

  (visas strax)



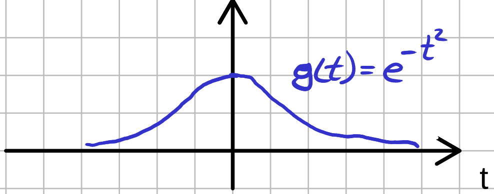


(Fortsättning)

Funktionerna rect & sinc

Exempel

Exempel (Gaußkurva)



$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,dt = \sqrt{\pi} \right)$$

Definiera: $g(t)=e^{-t^2}$, $G(\omega)=\mathcal{F}\{g(t)\}$.

Derivera: $g'(t) = -2te^{-t^2} = -2t\,g(t)$

Tab. 2:16

Tab. 2:11

Fouriertransformera: $j\omega G(\omega) = -2j\,\dfrac{dG}{d\omega}$

Lös separabla differentialekvationen:

$$\frac{\frac{dG}{d\omega}}{G(\omega)} = -\frac{\omega}{2} \Rightarrow \int \frac{\frac{dG}{d\omega}}{G(\omega)}\,d\omega = -\int \frac{\omega}{2}\,d\omega$$

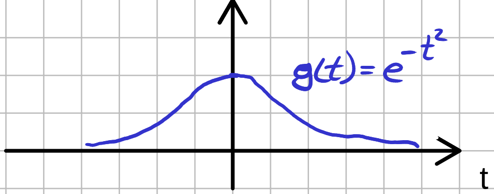
$$\int \frac{\frac{dG}{d\omega}}{G(\omega)}\,d\omega = /\text{kedjeregeln}/ = \int \frac{dG}{G} = \ln G$$

$$-\int \frac{\omega}{2}\,d\omega = -\frac{\omega^2}{4} + C$$

Vi samlar konstanterna från båda integralerna på andra sidan!

(Fortsättning)

Exempel (Gaußkurva)



$g(t)=e^{-t^2}$

Lös separabla differentialekvationen:

$$\frac{\frac{dG}{d\omega}}{G(\omega)} = -\frac{\omega}{2} \Rightarrow \int \frac{\frac{dG}{d\omega}}{G(\omega)}\, d\omega = -\int \frac{\omega}{2}\, d\omega$$

$$\Leftrightarrow \ln G = -\frac{\omega^2}{4} + C \Leftrightarrow G(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{4}} \cdot \underbrace{e^{C}}_{=C_1}.$$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, dt = \sqrt{\pi}\right)$$

Men ger DC-komponenten $G(0)=\sqrt{\pi}$, så $C_1 = \sqrt{\pi}$.

Slutsats: Viktigt transformpar (jfr Tab. 3:18)

$$e^{-t^2} \longleftrightarrow \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{\omega^2}{4}}.$$

(Avancerat)

Exempel