Föreläsning 4: Laplacetransformen

I kursen skall vi ägna oss åt olika typer av transformer, som kan användas för att analysera signaler och system. De används även för att konstruera / designa system, eller för att utföra beräkningar!

Tidsdomän (alt. rumsdomän) — Frekvensdomän (alt. transformdomän)

Transform ("basbyte") →

← Invers transform

Signaler / funktioner
- Tidsdiskreta vs tidskontinuerliga
- Periodiska vs icke-periodiska
- . . .

Ev. ej absolutintegrerbara!

Transformer / spektrum (också funktioner!)
- Diskreta vs kontinuerliga

Konvergensområde!

Enkelsidig vs. dubbelsidig

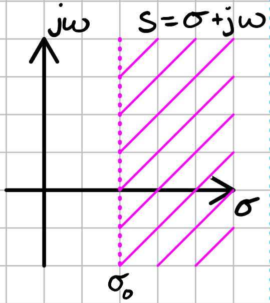
"unilateral"

Enkelsidig laplacetransform

$$X_I(s) = \mathcal{L}_I\{x(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt$$

Högersidigt konvergensområde

$\mathrm{Re}\{s\} > \sigma_0$



"bilateral"

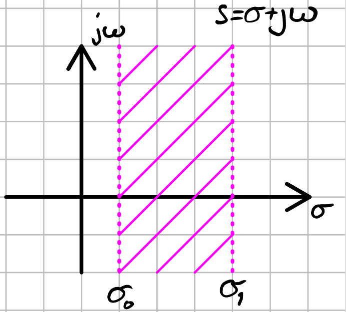
Dubbelsidig laplacetransform

$$X_{II}(s) = \mathcal{L}_{II}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt$$

Konvergensområde

$\sigma_0 < \mathrm{Re}\{s\} < \sigma_1$

Kan vara oändliga!

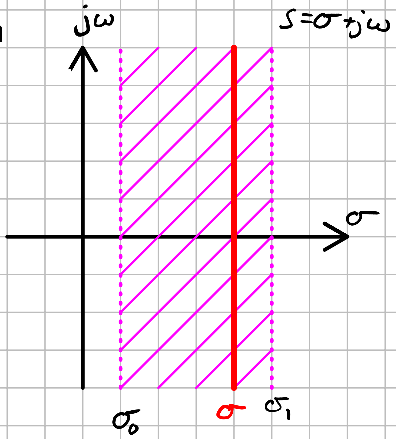


Invers laplacetransform

Inversa laplacetransformen ges, i både det enkelsidiga och det dubbelsidia fallet, av integralen

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s)e^{st}\,ds$$

för valfritt σ i konvergensområdet.



Jämför: Fouriers inversionsformel!
(Nu med "dämpning".)

I praktiken använder vi hellre tabeller och partialbråksuppdelning!

Några egenskaper

Enkelsidig | Dubbelsidig

1) Tidsförskjutning

Enkelsidig	Dubbelsidig
$x(t-t_0)u(t-t_0) \longleftrightarrow X_I(s)e^{-st_0}, \quad t_0 \geq 0$	$x(t-t_0) \longleftrightarrow X_{II}(s)e^{-st_0}$

2) Tidsskalning

Enkelsidig	Dubbelsidig
$x(at) \longleftrightarrow \frac{1}{a}X_I\left(\frac{s}{a}\right), \quad a>0$	$x(at) \longleftrightarrow \frac{1}{\lvert a\rvert}X_{II}\left(\frac{s}{a}\right), \quad a\neq 0$

(fortsättning)

Några egenskaper

Enkelsidig

Dubbelsidig

3) Frekvensförskjutning

$$x(t)e^{s_0 t} \longleftrightarrow X(s-s_0)$$

4) Derivering

$$x'(t) \longleftrightarrow sX_{I}(s) - x(0^-)$$

$$x'(t) \longleftrightarrow sX_{II}(s)$$

Härledning av sambandet för derivering

Enkelsidig

$$X_I(s) = \mathcal{L}_I\{x(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_I\{x'(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} x'(t)e^{-st}\,dt =$$

$$= \left[x(t)e^{-st}\right]_{0^-}^{\infty} - \int_{0^-}^{\infty} x(t)\cdot(-s)e^{-st}\,dt =$$

$$= 0 - x(0^-) + s\int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt =$$

$$= s\,X_I(s) - x(0^-)$$

Dubbelsidig

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X_{II}(s)e^{st}\,ds$$

$$\Rightarrow x'(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} sX_{II}(s)e^{st}\,ds$$

$$\mathcal{L}_{II}\{x'(t)\} = s\,X_{II}(s)$$

Några viktiga transformpar

$u_0(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$ $\quad u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \ge 0 \end{cases}$

$u(t) + u_0(-t) = 1$

$\delta(t) \leftrightarrow 1$

$\mathcal{L}_I\{\delta(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = 1$ $\quad \left(\mathcal{L}_{II}\{\delta(t)\} = \ldots = 1\right)$

$$\boxed{\begin{array}{lll} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}, & \mathrm{Re}\{s\} > 0 \\ u_0(-t) \leftrightarrow -\frac{1}{s}, & \mathrm{Re}\{s\} < 0 \end{array}}$$

$\mathcal{L}_{II}\{u_0(-t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(-t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{0^-} e^{-st} dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_{-\infty}^{0^-} = \frac{1}{-s} - \frac{0}{-s} = -\frac{1}{s}$

$\mathrm{Re}\{s\} < 0$

Detta visar sig i många samband!

$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -a$

$e^{-at}u_0(-t) \leftrightarrow -\frac{1}{s+a}, \quad \mathrm{Re}\{s\} < -a$

$\sin(\omega_0 t)u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s^2+\omega_0^2}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > 0$

$\cos(\omega_0 t)u(t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2+\omega_0^2}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > 0$

Exempel: Begynnelsevärdesproblem

Detta kräver högersidigt konvergensområde!

Lös diff. ekv. $\underbrace{y''+y'-2y}_{\text{transformera!}}=e^{-t}$, $t\geq 0$ med $y(0^-)=y'(0^-)=1$.

$e^{-t}u(t) \longleftrightarrow \dfrac{1}{s+1}$, $\mathrm{Re}\{s\}>-1$

Eventuellt kommer ytterligare krav på konvergensområdet att dyka upp!

Låt $Y(s)=\mathcal{L}_I\{y(t)\}$. Då blir $\mathcal{L}_I\{y'(t)\}=sY(s)-y(0^-)$, men vad är $\mathcal{L}_I\{y''(t)\}$?

Tips: sätt $z(t)=y'(t)$, dvs $z'(t)=y''(t)$. Då blir

$$\mathcal{L}_I\{y''(t)\}=\mathcal{L}_I\{z'(t)\} = s\,\mathcal{L}_I\{z(t)\}-z(0^-)=s\,\mathcal{L}_I\{y'(t)\}-y'(0^-)=$$

$$= s(sY(s)-y(0^-))-y'(0^-)=s^2Y(s)-sy(0^-)-y'(0^-)$$

Exempel: Begynnelsevärdesproblem

Ekvationen $y'' + y' - 2y = e^{-t}u(t)$

transformeras till $s^2Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-) + sY(s) - y(0^-) - 2Y(s) = \frac{1}{s+1}$

Re{s} > -1

$$\Leftrightarrow (s^2+s-2)Y(s) - s - 1 - 1 = \frac{1}{s+1} \Leftrightarrow$$

$$Y(s) = \frac{s+2}{\underbrace{s^2+s-2}_{(s+2)(s-1)}} + \frac{1}{(s+1)\underbrace{(s^2+s-2)}_{(s+2)(s-1)}} = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s+1)(s+2)(s-1)}$$

Re{s}>1 Re{s}>-1 Re{s}>-2

Högersidig funktion y(t), alltså konvergens-område till höger om alla poler!
Alltså Re{s}>1.

Inverstransformera:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s+1)(s+2)(s-1)}\right\} =$$

$$= /\text{partialbråksuppdelning}/ = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{s+1} + \frac{1/3}{s+2} + \frac{1/6}{s-1}\right\} = /\text{tabell}/ = \left(\frac{7}{6}e^{t} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-2t}\right)u(t)$$

Exempel: Inverstransform via partialbråk

Bestäm den inversa (dubbelsidiga) laplacetransformen till

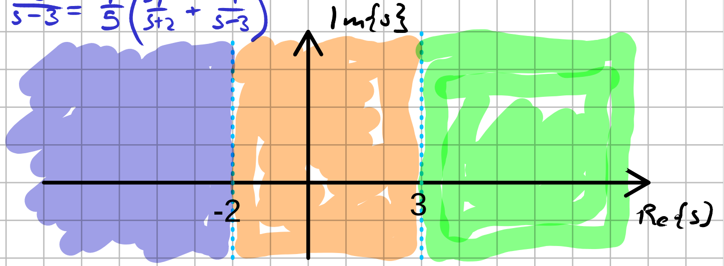
$$X(s) = \frac{1}{s^2 - s - 6}$$

för alla tänkbara konvergensområden!

Lösning: Faktorisera nämnaren, partialbråksuppdela,

$$X(s) = \frac{1}{(s+2)(s-3)} = \frac{-1/5}{s+2} + \frac{1/5}{s-3} = \frac{1}{5}\left(\frac{-1}{s+2} + \frac{1}{s-3}\right)$$

Möjliga konvergensområden:



Exempel: Inverstransform via partialbråk

Första fallet: $\mathrm{Re}\{s\} < -2$:

till vänster om bägge!

$$x(t) = \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{s+2} + \frac{1}{s-3}\right\} = \frac{1}{5}e^{-2t}u_0(-t) - \frac{1}{5}e^{3t}u_0(-t)$$

Andra fallet: $-2 < \mathrm{Re}\{s\} < 3$:

till höger om första, till vänster om den andra!

$$x(t) = \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{s+2} + \frac{1}{s-3}\right\} = -\frac{1}{5}e^{-2t}u(t) - \frac{1}{5}e^{3t}u_0(-t)$$

Tredje fallet: $3 < \mathrm{Re}\{s\}$:

till höger om bägge!

$$x(t) = \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{s+2} + \frac{1}{s-3}\right\} = -\frac{1}{5}e^{-2t}u(t) + \frac{1}{5}e^{3t}u(t)$$