Föreläsning 5: Z-transformen

I kursen skall vi ägna oss åt olika typer av transformer, som kan användas för att analysera signaler och system. De används även för att konstruera / designa system, eller för att utföra beräkningar!

Tidsdomän (alt. rumsdomän) → Frekvensdomän (alt. transformdomän)

Transform ("basbyte")

Signaler / funktioner
- Tidsdiskreta vs tidskontinuerliga
- Periodiska vs icke-periodiska
- . . .

Transformer / spektrum (också funktioner!)
- Diskreta vs kontinuerliga

Invers transform

Konvergensområde!

Enkelsidig vs. dubbelsidig

"unilateral"

Enkelsidig Z-transform: $X_I[z] = \mathcal{Z}_I\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$

"bilateral"

Dubbelsidig Z-transform: $X_{II}[z] = \mathcal{Z}_{II}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$

"ROC, Region of Convergence"

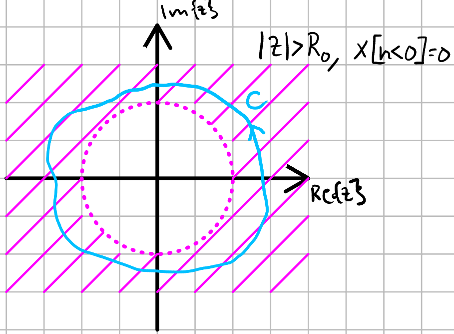
Liksom för laplacetransformen måste man även ange ett konvergensområde!

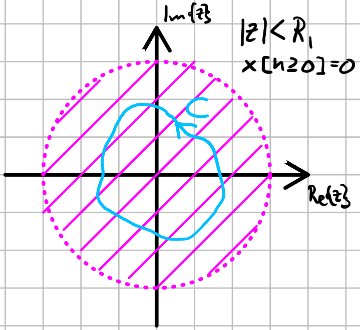
- Högersidig (kausal) x[n], med x[n < 0] = 0: $|z| > R_0$ (Laplace: $Re\{s\} > s_0$)
- Vänstersidig (antikausal) x[n], med x[n ≥ 0] = 0: $|z| < R_1$ (Laplace: $Re\{s\} < s_1$)
- Dubbelsidig x[n], med x[n] nollskild för minst något n > 0 och n < 0: $R_0 < |z| < R_1$ (Laplace: $s_0 < Re\{s\} < s_1$)

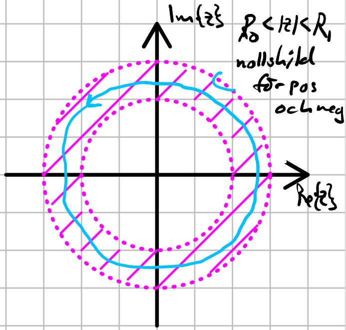
Invers Z-transform

Inversa Z-transformen ges av integralen $x[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{X[z]\} = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X[z]\, z^{n-1}\, dz,$

där C är en sluten, moturs orienterad kurva i konvergensområdet, och som omsluter origo.







Invers Z-transform (forts.)

Beräkning av inversa Z-transformer sker på något av följande sätt:

1. Beräkning av kurvintegralen (komplex analys, residykalkyl, ...)

2. Potensserieutveckling av X[z] till en serie med termer innehållande z^{-n}

3. Partialbråksuppdelning av X[z] (ofta lättare med X[z]/z), följt av tabellslagning där man identifierar transformpar för respektive partialbråk.

Vi föredrar metod 3 när det går (vilket är oftast)!

Några transformer

1) $\delta[n] \leftrightarrow 1 \quad \forall z$

$\delta[n-m] \leftrightarrow z^{-m}, \quad \begin{cases} |z|>0 & \text{om } m>0 \\ |z|<\infty & \text{om } m<0 \end{cases}$

$$\mathcal{Z}_{II}\{\delta[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] z^{-n} = \underbrace{\ldots + \delta[-1]z^{1}}_{=0} + \underbrace{\delta[0]z^{0}}_{1} + \underbrace{\delta[1]z^{-1} + \ldots}_{=0}$$

2) $\boxed{\begin{array}{ll} u[n] \leftrightarrow \frac{z}{z-1}, & |z|>1 \\ u[-n-1] \leftrightarrow -\frac{z}{z-1}, & |z|<1 \end{array}}$

Detta visar sig i många samband!

$$\mathcal{Z}_{II}\{u[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \Big/ \begin{array}{l}\text{konv. om} \\ |z^{-1}|<1\end{array} \Big/ = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}, \quad |z|>1$$

3) $\gamma^{n} u[n] \leftrightarrow \frac{z}{z-\gamma}, \quad |z|>|\gamma|$

$\gamma^{n} u[-n-1] \leftrightarrow -\frac{z}{z-\gamma}, \quad |z|<|\gamma|$

$$\mathcal{Z}_{II}\{\gamma^{n} u[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma^{n} u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^{n} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma}{z}\right)^{n} =$$

$$= \Big/ \begin{array}{l}\text{konv. om} \\ \left|\frac{\gamma}{z}\right|<1 \Leftrightarrow |\gamma|<|z|\end{array} \Big/ = \frac{1}{1-\frac{\gamma}{z}} = \frac{z}{z-\gamma}, \quad |z|>|\gamma|$$

(fortsättning)

Några transformer

4) $n\gamma^n u[n] \longleftrightarrow \dfrac{\gamma z}{(z-\gamma)^2}, \quad |z|>|\gamma|$

$n\gamma^n u[-n-1] \longleftrightarrow -\dfrac{\gamma z}{(z-\gamma)^2}, \quad |z|<|\gamma|$

5) $\gamma^n \cos(\Omega_0 n) u[n] \longleftrightarrow \dfrac{z(z-\gamma\cos\Omega_0)}{z^2-2\gamma\cos(\Omega_0)z+\gamma^2}, \quad |z|>|\gamma|$

$\gamma^n \sin(\Omega_0 n) u[n] \longleftrightarrow \dfrac{z\gamma\sin\Omega_0}{z^2-2\gamma\cos(\Omega_0)z+\gamma^2}, \quad |z|>|\gamma|$

(Även dessa går att "vända" mha konvergensområdet.)

Några egenskaper

Enkelsidig

Dubbelsidig

1) Högerskift (jfr tidsförskjutning)

höger- eller vänsterskift

(i) $x[n-m]u[n-m] \longleftrightarrow z^{-m}X_I[z]$

(ii) $x[n-m]u[n] \longleftrightarrow z^{-m}X_I[z] + z^{-m}\sum_{n=1}^{m} z^{n} x[-n]$

$x[n-m] \longleftrightarrow z^{-m}X_{II}[z]$

(i) $\mathcal{Z}_I\{x[n-m]u[n-m]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n-m]u[n-m]z^{-n} = \sum_{n=m}^{\infty} x[n-m]z^{-n} = \Big/ \begin{matrix} r=n-m \\ n=r+m \end{matrix} \Big/ = \sum_{r=0}^{\infty} x[r]z^{-m} \cdot z^{-r} = z^{-m}X_I(z)$

(fortsättning)

Några egenskaper

2) Spegling $x[-n] \leftrightarrow X_{II}[\frac{1}{z}]$

$\mathcal{Z}_{II}\{x[-n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n] z^{-n} = /\, r=-n \,/ = \sum_{r=\infty}^{-\infty} x[r] (z^{-1})^{-r}$

3) Mult. med n $n\,x[n] \leftrightarrow -z \frac{dX[z]}{dz}$

$X[z] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$

$\Rightarrow -z \frac{dX[z]}{dz} = z \sum_{n=-\infty}^{\infty} -n\,x[n] z^{-n-1}$

4) Mult med γ^n $\gamma^n x[n] \leftrightarrow X[\frac{z}{\gamma}]$

5) Initialvärdet $x[0] = \lim_{z\to\infty} X_I[z]$

6) Slutvärdet $\lim_{n\to\infty} x[n] = \lim_{z\to 1} (z-1) X_I[z]$

Exempel: Inverstransform via partialbråk

Bestäm den inversa (dubbelsidiga) Z-transformen till

$$X[z] = \frac{1}{z^{-2} - z^{-1} - 6}$$ för alla tänkbara konvergensområden!

Lösning: $X[z] = \frac{z^2}{1 - z - 6z^2}$, partialbråksuppdela $\frac{X[z]}{z} = \frac{z}{1 - z - 6z^2} = \frac{z}{(1+2z)(1-3z)} =$

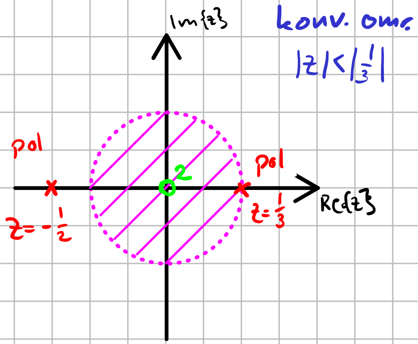
$$= \frac{-1/5}{1+2z} + \frac{1/5}{1-3z} = -\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{z + \frac{1}{2}} - \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{z - \frac{1}{3}}$$

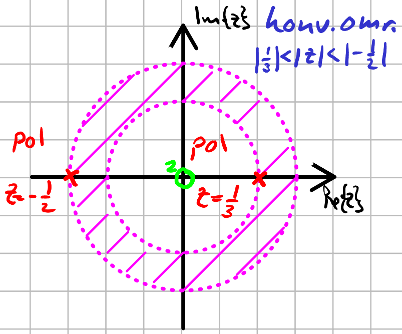
multiplicera upp z $\Rightarrow$ $X[z] = -\frac{1}{10} \cdot \frac{z}{z + 1/2} - \frac{1}{15} \cdot \frac{z}{z - 1/3}$.

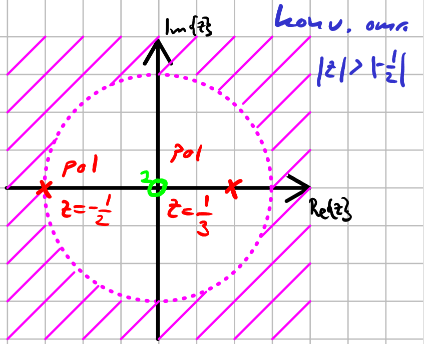
pol i $z = -\frac{1}{2}$

pol i $z = \frac{1}{3}$

Exempel: Inverstransform via partialbråk (forts.)







$$X[z] = -\frac{1}{10}\cdot\frac{z}{z+1/2} - \frac{1}{15}\cdot\frac{z}{z-1/3} \Longrightarrow$$

o är ett <u>nollställe</u>, ignorera för tillfället

$$x[n] = \frac{1}{10}0.5^n u[-n-1] + \frac{1}{15}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]$$

$$x[n] = \frac{1}{10}\cdot 0.5^n u[-n-1] - \frac{1}{15}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

$$x[n] = -\frac{1}{10}\cdot 0.5^n u[n] - \frac{1}{15}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$