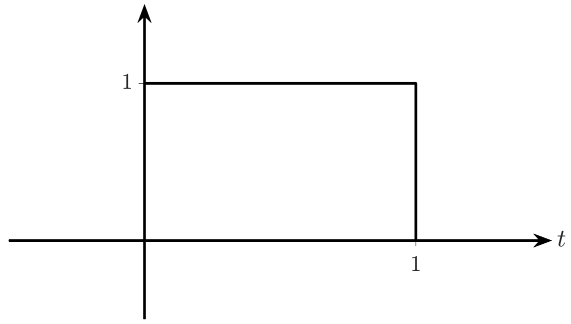
# 3 Laplacetransformen

## 3.1 Den enkelsidiga laplacetransformen

**3.1.1** **a)** $x_a(t) = u(t) - u(t-1)$




$$X_a(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t)e^{-st}dt = \int_0^1 1 \cdot e^{-st}dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^1 = \frac{e^{-s} - e^0}{-s} = \frac{1 - e^{-s}}{s}$$

Konvergensområdet (där $|X_a(s)| < \infty$) är av typen $\mathrm{Re}\{s\} > \sigma_0$, eftersom $x_a(t) = 0$ för $t < 0$.

För $s = 0$ blir nämnaren noll, vilket verkar antyda att konvergensområdet är $\mathrm{Re}\{s\} > 0$. Dock är även täljaren noll för $s = 0$, så vi potensserieutvecklar lämpligen $e^{-s}$ för att se bättre hur $X_a(0)$ ser ut:

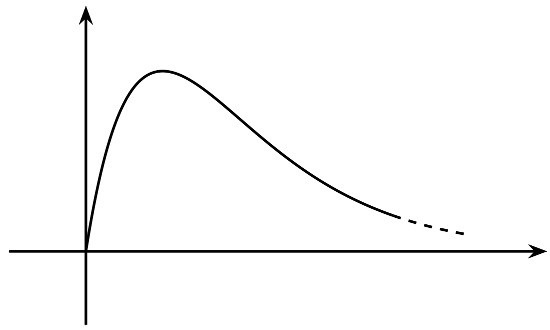
$$X_a(s) = \frac{1 - \left(1 + (-s) + \frac{(-s)^2}{2!} + \frac{(-s)^3}{3!} + \dots\right)}{s} = 1 - \frac{s}{2} + \frac{s^2}{6} - \dots$$

dvs. $X_a(0) = 1$

Konsekvensen blir att konvergensområdet är *hela s-planet, utom* $\mathrm{Re}\{s\} = -\infty$ (eftersom $\lim\limits_{s=\sigma \to -\infty} X_a(s) = \infty$), dvs. $\mathrm{Re}\{s\} > -\infty$.

Anm: Om du svarar att $\int_{-\infty}^{\infty} |x_a(t)e^{-\sigma t}|dt < \infty$ för alla $\sigma > -\infty$, så räcker det också som motivering till konvergensområdet.
Vanligen uppkommer *inte* så långa konvergensområdesresonemang som ovan, vid laplacetransformberäkningar!

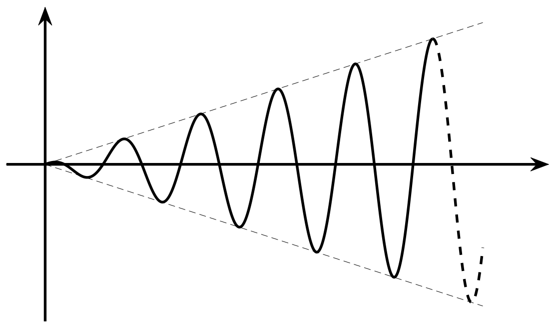
**b)** $x_b(t) = t \cdot e^{-t} \cdot u(t)$




$$
\begin{aligned}
X_b(s) &= \int_0^\infty te^{-t} \cdot e^{-st} dt = \int_0^\infty t \cdot e^{-(s+1)t} dt = \left[\frac{t \cdot e^{-(s+1)t}}{-(s+1)}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-(s+1)t}}{-(s+1)} dt \\
&= \left[\frac{t \cdot e^{-(s+1)t}}{-(s+1)} - \frac{e^{-(s+1)t}}{(s+1)^2}\right]_0^\infty \\
&= \Big/ \lim_{t\to\infty} e^{-(s+1)t} = 0 \text{ om } \operatorname{Re}\{s+1\} > 0, \text{ dvs. } \operatorname{Re}\{s\} > -1 \Big/ \\
&= \Big/ e^{-(s+1)t} \text{ går snabbare mot 0 än vad } t \text{ går mot } \infty \text{ då } t \to \infty \Big/ \\
&= \frac{0 - 0 \cdot e^0}{-(s+1)} - \frac{0 - e^0}{(s+1)^2} = \frac{1}{(s+1)^2}, \quad \text{Konvergensområde: } \operatorname{Re}\{s\} > -1
\end{aligned}
$$

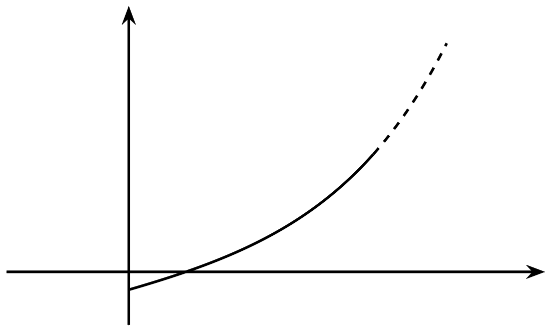
*Notera att du, vid den partiella integrationen ovan, får använda sambandet* $\int t \cdot e^{at} dt = \frac{e^{at}}{a^2}(at-1)$, *som du hittar på sidan 3 i kursens formelsamling.*

**c)** $x_c(t) = t \cdot \cos(\omega_0 t) u(t)$




$$
\begin{aligned}
X_c(s) &= \int_0^\infty t \cdot \cos(\omega_0 t) \cdot e^{-st} dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(t \cdot e^{-(s-j\omega_0)t} + t \cdot e^{-(s+j\omega_0)t}\right) dt \\
&= /\text{Partiell integration, som i b)}/ \\
&= \Big/ \lim_{t\to\infty} e^{-(s\pm j\omega_0)t} = 0 \text{ om } \operatorname{Re}\{s \pm j\omega_0\} = \operatorname{Re}\{s\} > 0 \Big/ \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(s-j\omega_0)^2} + \frac{1}{(s+j\omega_0)^2}\right) = \frac{s^2 - \omega_0^2}{(s^2+\omega_0^2)^2}, \quad \text{Konv.omr: } \operatorname{Re}\{s\} > 0
\end{aligned}
$$

**d)** $x_d(t) = \left(e^{2t} - 2e^{-t}\right) u(t)$




$$\begin{aligned}
X_d(s) &= \int_0^\infty \left(e^{2t} - 2e^{-t}\right) e^{-st} = \int_0^\infty \left(e^{-(s-2)t} - 2e^{-(s+1)t}\right) dt \\
&= \left[\frac{e^{-(s-2)t}}{-(s-2)} - 2\frac{e^{-(s+1)t}}{-(s+1)}\right]_0^\infty \\
&= \Big/ \begin{array}{ll} \lim_{t\to\infty} e^{-(s-2)t} = 0 & \text{om } \mathrm{Re}\{s-2\} > 0 \Rightarrow \mathrm{Re}\{s\} > 2 \\ \lim_{t\to\infty} e^{-(s+1)t} = 0 & \text{om } \mathrm{Re}\{s+1\} > 0 \Rightarrow \mathrm{Re}\{s\} > -1 \end{array} \Big/ \\
&= \frac{1}{s-2} - \frac{2}{s+1} = \frac{-s+5}{(s-2)(s+1)} \qquad \text{Konv.omr.: } \mathrm{Re}\{s\} > 2 \text{ (uppfyllt för båda termerna)}
\end{aligned}$$

(*Notera att de två termerna i inledningen av sista raden ovan har konvergensområde* $\mathrm{Re}\{s\} > 2$ *respektive* $\mathrm{Re}\{s\} > -1$*, medan konvergensområdet för det sammansatta uttrycket för* $X_d(s)$ *är snittet mellan dessa, dvs.* $\mathrm{Re}\{s\} > 2$)

**3.1.2** **a)**

$$\begin{aligned}
V(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} v(t)e^{-st}dt = \int_0^1 t\cdot e^{-st}dt = \left[\frac{t\cdot e^{-st}}{-s}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{-st}}{-s}dt = \left[\frac{t\cdot e^{-st}}{-s} - \frac{e^{-st}}{s^2}\right]_0^1 \\
&= \frac{-e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}-1}{s^2} = \frac{-se^{-s} - e^{-s} + 1}{s^2} \qquad \left(= \frac{1 - e^{-s} - se^{-s}}{s^2}\right)
\end{aligned}$$

Signalen $v(t)$ är kausal, dvs. $v(t) = 0$ för $t < 0$, vilket ger att $V(s)$ har ett *högersidigt* konvergensområde, $\mathrm{Re}\{s\} > \sigma_0$ för något $\sigma_0$. Eftersom $v(t)$ har *ändlig tidsutbredning* så är $\sigma_0 = -\infty$ och konvergensområdet för $V(s)$ är alltså $\mathrm{Re}\{s\} > -\infty$.
(Detta på grund av att signalen $v(t)\cdot e^{-\sigma}$ är absolutintegrerbar för alla $\sigma > -\infty$.)

(*Med* $s^2$ *i nämnaren, så ser det ut som att* $|V(0)| = \infty$*, men om man potensserieutvecklar* $e^{-s}$ *i täljaren, så erhålls en* $s^2$*-faktor i täljaren, som förkortar bort nämnarens* $s^2$ *och följaktligen blir* $|V(0)|$ *ändlig. Se liknande resonemang i lösningen av deluppgift a) i föregående uppgift.*)

**b)**

$$\begin{aligned}
W(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} w(t)e^{-st}dt = \int_0^\pi \sin(t)\cdot e^{-st}dt = \Big/ \sin(t) = \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j} \Big/ \\
&= \frac{1}{2j}\int_0^\pi \left(e^{-(s-j)t} - e^{-(s+j)t}dt\right) = \frac{1}{2j}\left[\frac{e^{-(s-j)t}}{-(s-j)} - \frac{e^{-(s+j)t}}{-(s+j)}\right]_0^\pi \\
&= \frac{1}{2j}\left(\frac{e^{-s\pi}\cdot e^{j\pi} - 1}{-(s-j)} - \frac{e^{-s\pi}\cdot e^{-j\pi} - 1}{-(s+j)}\right) = \Big/ e^{\pm j\pi} = -1 \Big/ \\
&= \frac{e^{-s\pi} + 1}{2j}\cdot\frac{s+j-(s-j)}{(s-j)(s+j)} = \frac{e^{-s\pi}+1}{s^2+1}
\end{aligned}$$

Konvergensområdet är $\mathrm{Re}\{s\} > -\infty$, vilket erhålls på grund av att $w(t)$ är en *kausal signal med ändlig tidsutbredning* – dvs. samma motivering som i deluppgift a) ovan.

**c)**

$$
\begin{aligned}
X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_0^1 \frac{1}{e}t \cdot e^{-st}dt + \int_1^{\infty} e^{-t}e^{-st}dt \\
&= /\text{Den första termen beräknades i uppg. a)}/ \\
&= \frac{1 - e^{-s} - se^{-s}}{s^2} + \left[\frac{e^{-(s+1)t}}{-(s+1)}\right]_1^{\infty} \\
&= /\mathrm{Re}\{s\} > -\infty \text{ resp. } \mathrm{Re}\{s+1\} > 0, \text{ dvs. } \mathrm{Re}\{s\} > -1/ \\
&= \frac{1 - e^{-s} - se^{-s} + 1}{s^2} + \frac{e^{-(s+1)}}{s+1} \\
&= \frac{s + 1 - (1+2s)e^{-s}}{es^2(s+1)}, \qquad \mathrm{Re}\{s\} > -1
\end{aligned}
$$

(*Konvergensområdet är snittet av* $\mathrm{Re}\{s\} > -\infty$ *och* $\mathrm{Re}\{s\} > -1$)

**3.1.3** *Enkelsidiga* transformer, enligt uppgift, vilket innebär att alla transformer har ett *högersidigt konvergensområde*, dvs. av typen $\mathrm{Re}\{s\} > \sigma_0$. Utveckla transformerna till termer vars transformpar hittas i formelsamlingens Tabell 5.

**a)**

$$
X_1(s) = \frac{2s+5}{s^2+5s+6} = \frac{2s+5}{(s+2)(s+3)} = /\text{Partialbråksuppdelning}/ = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+3}
$$

Enkelsidig transform $\Rightarrow$ $\mathrm{Re}\{s\} > -2$ respektive $\mathrm{Re}\{s\} > -3$

Tab. 5:11 $\Rightarrow$ $\mathrm{x}_1(t) = \left(e^{-2t} + e^{-3t}\right) u(t)$

**b)**

$$
\begin{aligned}
X_2(s) &= \frac{3s+5}{s^2+4s+13} = \frac{3(s+2) - \frac{1}{3}\cdot 3}{(s+2)^2+3^2} \\
&= 3 \cdot \frac{s+2}{(s+2)^2+3^2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{(s+2)^2+3^2}
\end{aligned}
$$

Konvergensområdet är $\mathrm{Re}\{s\} > -2$ för båda termerna.

$$
\text{Tab. 5:20 resp. 5:21} \;\Rightarrow\; x_2(t) = \left(3e^{-2t}\cos(3t) - \frac{1}{3}e^{-2t}\sin(3t)\right) u(t)
$$

*Du kan även använda Tab. 5:22 direkt på laplacetransformen i andra steget (med* $3s + 5$ *i täljaren), men här delas transformen upp i de två termerna för att förtydliga hur de två termerna i* $x_2(t)$ *erhålls. Gör gärna så i alla liknande uppgifter, t.ex. även i deluppgift e.*

**c)**

$$
\begin{aligned}
X_3(s) &= \frac{(s+1)^2}{s^2-s-6} \\
&= \Big/ \begin{array}{l} \text{Täljarens gradtal är } \geq \text{ nämnarens gradtal} \\ \Rightarrow \text{ omforma! Egentligen utför vi polynomdivision.} \end{array} \Big/ \\
&= \frac{s^2-s-6+3s+7}{s^2-s-6} = 1 + \frac{3s+7}{(s+2)(s-3)} \\
&= /\text{Partiabråksuppdela}/ = 1 - 0{,}2\frac{1}{s+2} + 3{,}2\frac{1}{s-3}
\end{aligned}
$$

Konvergensområde $\mathrm{Re}\{s\} > -2$ och $\mathrm{Re}\{s\} > 3$ för andra respektive tredje termen.

Tabell 5:1 & 5:11 ger därför $x_3(t) = \delta(t) - \left(0{,}2e^{-2t} - 3{,}2e^{3t}\right) u(t)$

**d)**

$$
X_4(s) = \frac{5}{s^2(s+2)} = \underbrace{-\frac{5}{4}\frac{1}{s} + \frac{5}{2}\frac{1}{s^2}}_{\mathrm{Re}\{s\}>0} + \underbrace{\frac{5}{4}\frac{1}{s+2}}_{\mathrm{Re}\{s\}>-2}
$$

$$
\text{Tab. 5:3, 5:4 respektive 5:11} \quad \Rightarrow \quad x_4(t) = \frac{5}{4}\left(-1 + 2t + e^{-2t}\right) u(t)
$$

**e)**

$$
\begin{aligned}
X_5(s) &= \frac{2s+1}{(s+1)(s^2+2s+2)} = /\text{Partialbråksuppdela}/ = \frac{-1}{s+1} + \frac{s+3}{s^2+2s+2} \\
&= \frac{-1}{s+1} + \frac{(s+1)+2}{(s+1)^2+1^2} = -\frac{1}{s+1} + \frac{s+1}{(s+1)^2+1^2} + 2\cdot\frac{1}{(s+1)^2+1^2}
\end{aligned}
$$

Konvergensområde $\mathrm{Re}\{s\} > -1$ för alla tre termerna.

Tabell 5:11, 5:20 respektive 5:21 $\quad\Rightarrow\quad \mathrm{x}_5(t) = e^{-t}\left(-1 + \cos(t) + 2\sin(t)\right) u(t)$

*Liksom i deluppgift b) så går det att använda Tab. 5:22 i stället för Tab. 5:20 och 5:21 – se kommentaren till svaret på b).*

**f)**

$$
\begin{aligned}
X_6(s) &= \frac{s+2}{s(s+1)^2} = \Big/ \text{Partialbråksuppdela till } \frac{\mathrm{A}}{s} + \frac{\mathrm{B}}{s+1} + \frac{\mathrm{C}}{(s+1)^2} \Big/ \\
&= 2\cdot\frac{1}{s} - 2\cdot\frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}
\end{aligned}
$$

Konvergensområdet för de tre termerna är $\mathrm{Re}\{s\} > 0$, $\mathrm{Re}\{s\} > -1$ respektive $\mathrm{Re}\{s\} > -1$.

Tab. 5:3, 5:11 & 5:12 $\quad\Rightarrow\quad \mathrm{x}_6(t) = 2u(t) - 2e^{-t}u(t) - te^{-t}u(t) = \left(2 - (2+t)e^{-t}\right) u(t)$

## 3.2 Egenskaper hos laplacetransformen

**3.2.1** Tabell 4:5 anger egenskapen $x(t-t_0)u(t-t_0) \Longleftrightarrow X_I(s)e^{-st_0}, \quad t \geq 0$

**a)**

$$x_1(t) = u(t) - u(t-1)$$

$$\text{Tab. 5:3} \Rightarrow u(t) \Longleftrightarrow \frac{1}{s}, \ \ \text{Re}\{s\} > 0$$
$$\Rightarrow u(t-1) \Longleftrightarrow \frac{1}{s}e^{-s}$$

$$\Rightarrow X_1(s) = \frac{1}{s}\left(1 - e^{-s}\right), \ \text{Re}\{s\} > -\infty$$

För motivering av konvergensområdet, se lösningen till uppgift 3.1.1 a)

**b)**

$$x_2(t) = e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)$$

$$\text{Tab. 5:11} \Rightarrow e^{-t}u(t) \Longleftrightarrow \frac{1}{s+1}, \ \ \text{Re}\{s\} > -1$$

$$\Rightarrow X_2(s) = \frac{1}{s+1}e^{-s\tau}, \ \ \text{Re}\{s\} > -1$$

**c)**

$$x_3(t) = e^{-(t-\tau)}u(t) = e^{\tau} \cdot e^{-t} \cdot u(t)$$

$$\Rightarrow X_3(s) = e^{\tau} \cdot \frac{1}{s+1}, \ \ \text{Re}\{s\} > -1 \ (\text{Tab. 5:11})$$

**3.2.2** Tabell 4:5 anger egenskapen $x(t-t_0)u(t-t_0) \Longleftrightarrow X_I(s)e^{-st_0}, \quad t \geq 0$

**a)**

$$v(t) = t\,(u(t) - u(t-1)) = tu(t) - (t-1)u(t-1) - u(t-1)$$

$$\text{Tab. 5:3, 5:4 \& 4:5} \quad \Rightarrow \quad V(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2} \cdot e^{-s} - \frac{1}{s} \cdot e^{-s} = \frac{1 - e^{-s} - se^{-s}}{s^2}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -\infty$$

Se motivering av konvergensområde i lösningen till 3.1.2 a).

**b)**

$$w(t) = \sin(t)\,(u(t) - u(t-\pi)) = \sin(t)u(t) + \underbrace{\sin(t-\pi)}_{=-\sin(t)}u(t-\pi)$$

$$\text{Tab. 5:19 \& 4:5} \quad \Rightarrow \quad W(s) = \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}e^{-s\pi} = \frac{1 + e^{-s\pi}}{s^2+1}$$

Konvergensområde $\mathrm{Re}\{s\} > -\infty$, se motivering i lösningen till 3.1.2 b).

**c)**

$$x(t) = \frac{t}{e}\,(u(t) - u(t-1)) + e^{-t}u(t-1) = \frac{1}{e}v(t) + e^{-1} \cdot e^{-(t-1)}u(t-1)$$

Tabell 5:11 & 4:5 $\quad \Rightarrow$

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{e}V(s) + e^{-1}\frac{1}{s+1}e^{-s} \\ &= \frac{1 - e^{-s} - se^{-s}}{es^2} + \frac{e^{-(s+1)}}{s+1} \\ &= \frac{s + 1 - (1+2s)e^{-s}}{es^2(s+1)}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -1 \end{aligned}$$

(*Konvergensområdet är snittet av* $\mathrm{Re}\{s\} > -\infty$ *och* $\mathrm{Re}\{s\} > -1$)

## 3.3 Lösning av differentialekvation m.h.a. laplacetransformen

**3.3.1** **a)**

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=\frac{dx(t)}{dt}$$

$$\mathcal{L}_I\{\text{vänsterledet}\}=\mathcal{L}_I\{\text{högerledet}\}$$

$$\text{och Tab. 4:10}\quad \frac{d^nx(t)}{dt^n}\Longleftrightarrow s^nX(s)-s^{n-1}x(0^-)+s^{n-2}\frac{dx(0^-)}{dt}+\dots$$

$$\Rightarrow\ s^2Y(s)\underbrace{-sy(0^-)-\frac{dy(0^-)}{dt}}_{=0}+3\left(sY(s)-\underbrace{y(0^-)}_{=0}\right)+2Y(s)=sX(s)-\underbrace{x(0^-)}_{=0}$$

$$\text{Med } x(t)=u(t) \text{ ger Tab. 5:3 att } X(s)=\frac{1}{s},\ \text{Re}\{s\}>0$$

$$\text{dvs. vi erhåller } \left(s^2+3s+2\right)Y(s)=s\cdot\frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow\ Y(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}=/\text{P.B.U.}/=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2};\ \text{Re}\{s\}>-1$$

Högersidigt konvergensområde ges av att $Y(s)$ är en enkelsidig laplacetransform. $\text{Re}\{s\}>-1$ erhålls av snittet mellan $\text{Re}\{s\}>-1$ för den första termen och $\text{Re}\{s\}>-2$ för den andra termen.

Tabell 5:11 ger då inverstransformen y(t) $=\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)u(t)$

**b)**

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+4\frac{dy(t)}{dt}+4y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+x(t)$$

Efter en enkelsidig laplacetransformering av vänsterledet och högerledet enligt Tabell 4:10, så erhålls

$$s^2Y(s)-s\underbrace{y(0^-)}_{=2}-\underbrace{\frac{dy(0^-)}{dt}}_{=1}+4\left(sY(s)-\underbrace{y(0^-)}_{=2}\right)+4Y(s)=sX(s)-\underbrace{x(0^-)}_{=0}+X(s)$$

$$x(t)=e^{-t}u(t)\ \Rightarrow\ X(s)=\frac{1}{s+1};\ \text{Re}\{s\}>-1$$

$$\Rightarrow\ s^2Y(s)-2s-1+4\left(sY(s)-2\right)+4Y(s)=s\cdot\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+1}$$

$$\Rightarrow\ \left(s^2+4s+4\right)Y(s)=2s+10$$

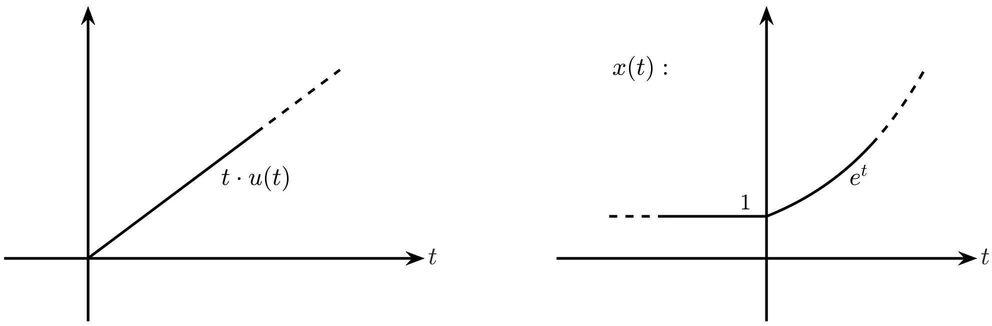
$$\Rightarrow\ Y(s)=\frac{2s+10}{(s+2)^2}=/\text{P.B.U.}/=\frac{2}{s+2}+\frac{6}{(s+2)^2},\ \text{Re}\{s\}>-2$$

Tabell 5:11 & 5:12 ger slutligen $y(t)=(2+6t)\,e^{-2t}u(t)$

## 3.4 Den dubbelsidiga laplacetransformen

**3.4.1** **a)**

$$x(t) = e^{t \cdot u(t)}$$




$$t \cdot u(t) = \begin{cases} 0; & t < 0 \\ t; & t \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{t \cdot u(t)} = \begin{cases} e^0 = 1; & t < 0 \\ e^t; & t \geq 0 \end{cases}$$

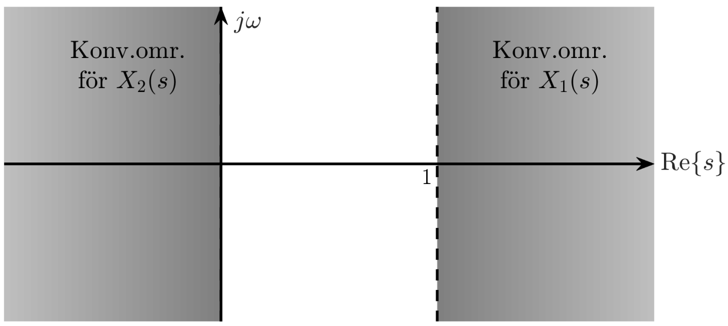
$$\Rightarrow x(t) = x_2(t) + x_1(t), \text{ där } \begin{cases} x_2(t) = u_0(-t) \\ x_1(t) = e^t \cdot u(t) \end{cases}$$

$$\text{Tab. 4:4 } \Rightarrow X_2(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}\Big|_{s \to -s} = \frac{1}{-s}$$

med konvergensområde $\mathrm{Re}\{s\} < 0$ (Ges även direkt av Tab. 5:7)

$$X_1(s) = \frac{1}{s-1} \text{ har konvergensområde } \mathrm{Re}\{s\} > 1 \text{ (Tab 5:11)}$$

Dvs.



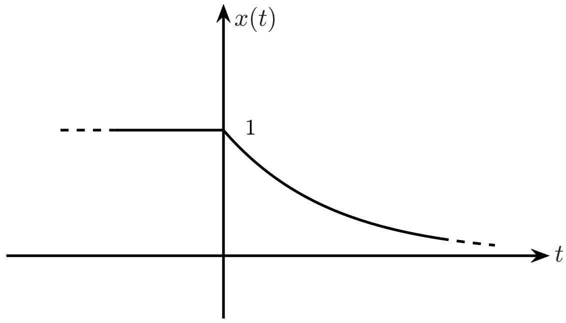

I figuren ovan ser vi att $X_2(s) + X_1(s)$ har *inte* något sammanhängande konvergensområde, vilket innebär att

$$X_2(s) + X_1(s) = \frac{-1}{s} + \frac{1}{s-1} = \frac{1}{s(s-1)}$$

*inte* utgör en laplacetransform till $x(t)$ (dvs. $x(t)$ har ingen laplacetransform!)

**b)**

$$x(t) = e^{-t\cdot u(t)} = \begin{cases} 1; & t < 0 \\ e^{-t}; & t \geq 0 \end{cases} = x_2(t) + x_3(t), \text{ där } x_2(t) = u_0(-t), \text{ som i a), där}$$

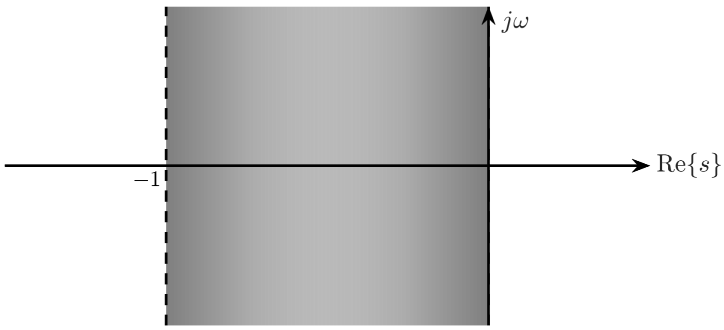



$$X_2(s) = \mathcal{L}\{x_2(t)\} = \frac{-1}{s} \text{ med konv. omr. } \mathrm{Re}\{s\} < 0$$
$$X_3(s) = \mathcal{L}\{x_3(t)\} = \frac{1}{s+1} \text{ med konv. omr. } \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

Konvergensområdet för

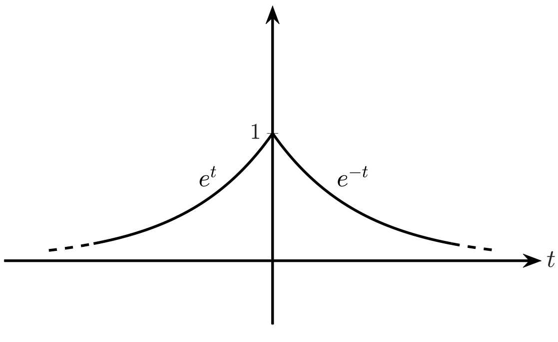
$$X(s) = X_2(s) + X_3(s) = \frac{-1}{s} + \frac{1}{s+1} = \frac{-1}{s(s+1)}$$

är därför $-1 < \mathrm{Re}\{s\} < 0$




**3.4.2** **a)**

$$x_a(t) = e^{-|t|} = \underbrace{e^t \cdot u_0(-t)}_{x_2(t)} + \underbrace{e^t \cdot u(t)}_{x_1(t)}$$



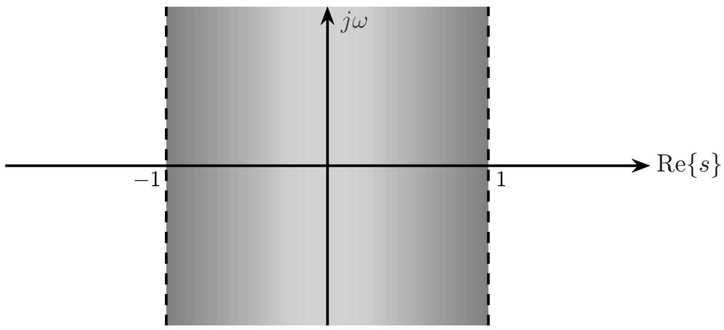
$$\Rightarrow \; X_1(s) = \frac{1}{s+1}; \; \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

$$x_2(t) = x_1(-t) \;\Rightarrow\; /\text{Tab. 4:4}/ \;\Rightarrow\; X_2(s) = X_1(-s) = \frac{1}{-s+1} = \frac{-1}{s-1}$$

för $\mathrm{Re}\{-s\} > -1$, dvs. $\mathrm{Re}\{s\} < 1$

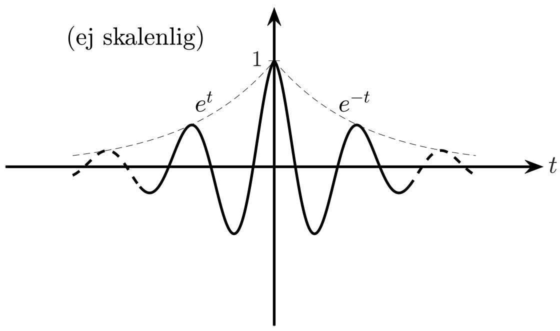
$$\text{Tabell 5:11} \;\Rightarrow\; X_a(s) = X_2(s) + X_1(s) = \frac{-1}{s-1} + \frac{1}{s+1} = \frac{-2}{(s-1)(s+1)}$$

med konvergensområde $-1 < \mathrm{Re}\{s\} < 1$




**b)**

$$x_b(t) = e^{-|t|} \cdot \cos(t) = \underbrace{e^t \cos(t) u_0(-t)}_{x_2(t)} + \underbrace{e^{-t} \cos(t) u(t)}_{x_1(t)}$$




Tabell 5:20 $\Rightarrow$

$$X_1(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2 + 1^2}; \; \mathrm{Re}\{s\} > -1 \quad (\text{från } (s+1) \text{ i nämnaren})$$

$$x_2(t) = x_1(-t) \;\Rightarrow\; /\text{Tab. 4:4}/ \;\Rightarrow$$

$$X_2(s) = X_1(-s) = \frac{-s+1}{(-s+1)^2 + 1^2} = -\frac{s-1}{(s-1)^2 + 1^2};$$

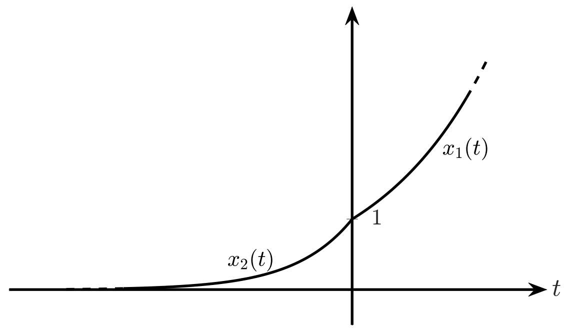
$\mathrm{Re}\{-s\} > -1$, dvs. $\mathrm{Re}\{s\} < 1$ (erhålls även direkt från Tab. 5:27)

$$X_b(s) = X_2(s) + X_1(s) = \frac{4 - 2s^2}{s^4 + 4}; \quad -1 < \mathrm{Re}\{s\} < 1$$

Samma konvergensområde som i uppgift a).

**c)**

$$x_c(t) = \underbrace{e^t u(t)}_{x_1(t)} + \underbrace{e^{2t} u_0(-t)}_{x_2(t)}$$




$$\text{Tabell 5:11 ger } X_1(s) = \frac{1}{s-1}; \quad \text{Re}\{s\} > 1$$

$$x_2(t) = x_3(-t), \text{ där } x_3(t) = e^{-2t}u(t)$$

$$\Rightarrow \; X_3(s) = \frac{1}{s+2}; \; \text{Re}\{s\} > -2 \;\; (\text{från Tab. 5:11})$$

$$\Rightarrow \; X_2(s) = X_3(-s) = \frac{1}{-s+2} = \frac{-1}{s-2}; \quad \text{Re}\{-s\} > -2, \text{ dvs. } \text{Re}\{s\} < 2$$

($X_2(s)$ kan även erhållas direkt från Tab. 5:14.)

$$X_c(s) = X_1(s) + X_2(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s-2} = \frac{-1}{(s-1)(s-2)}; \quad 1 < \text{Re}\{s\} < 2$$

**3.4.3** **a)**

$$X_a(s) = \frac{2s+5}{(s+2)(s+3)} = \underbrace{\frac{1}{s+2}}_{=X_1(s)} + \underbrace{\frac{1}{s+3}}_{=X_2(s)}; \quad -3 < \text{Re}\{s\} < -2$$

Dvs.:

$$X_2(s) = \frac{1}{s+3}; \; \text{Re}\{s\} > -3 \;\xRightarrow{\text{Tab. 5:11}}\; x_2(t) = e^{-3t}u(t)$$

$$X_1(s) = \frac{1}{s+2}; \; \text{Re}\{s\} < -2$$

$$\text{Låt } X_3(s) = X_1(-s) = \frac{1}{-s+2} = -\frac{1}{s-2}; \quad \text{Re}\{-s\} < -2, \text{ dvs. } \text{Re}\{s\} > 2$$

Tabell 5:11 ger då

$$x_3(t) = -e^{2t}u(t) \Rightarrow$$

$$x_1(t) = x_3(-t) = -e^{-2t}u_0(-t)$$

(Notera att $x_1(t)$ även kan erhållas direkt från $X_1(s)$ m.h.a. Tab. 5:14.)

Vi har alltså

$$X_a(s) = X_1(s) + X_2(s) \quad \Rightarrow$$

$$x_a(t) = x_1(t) + x_2(t) = -e^{-2t}u_0(-t) + e^{-3t}u(t)$$

**b)**

$$X_b(s) = \frac{2s-5}{(s-2)(s-3)} = \underbrace{\frac{1}{s-2}}_{\substack{=X_1(s)\\ \mathrm{Re}\{s\}>2}} + \underbrace{\frac{1}{s-3}}_{\substack{=X_2(s)\\ \mathrm{Re}\{s\}<3}} \;;\; 2 < \mathrm{Re}\{s\} < 3$$

$$\Rightarrow\; x_1(t) = e^{2t}u(t) \text{ (erhålls från Tab. 5:11)}$$

$$X_3(s) = X_2(-s) = -\frac{1}{s+3};\;\; \mathrm{Re}\{s\} > -3$$

$$\xRightarrow{\text{Tab. 5:11}}\; x_3(t) = e^{-3t}u(t) \;\Rightarrow\; x_2(t) = x_3(-t) = -e^{3t}u_0(-t)$$

(Notera att $x_2(t)$ även kan erhållas direkt från $X_2(s)$ m.h.a. Tab. 5:14)

Vi får därför följande inverstransform:

$$x_b(t) = x_1(t) + x_2(t) = e^{2t}u(t) - e^{3t}u_0(-t)$$

**c)**

$$X_c(s) = \frac{2s+3}{(s+1)(s+2)} = \underbrace{\frac{1}{s+1}}_{\mathrm{Re}\{s\}>-1} + \underbrace{\frac{1}{s+2}}_{\mathrm{Re}\{s\}>-2} \;;\;\; \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

$$\xRightarrow{\text{Tab. 5:11}}\; x_c(t) = \left(e^{-t} + e^{-2t}\right)u(t)$$

**d)**

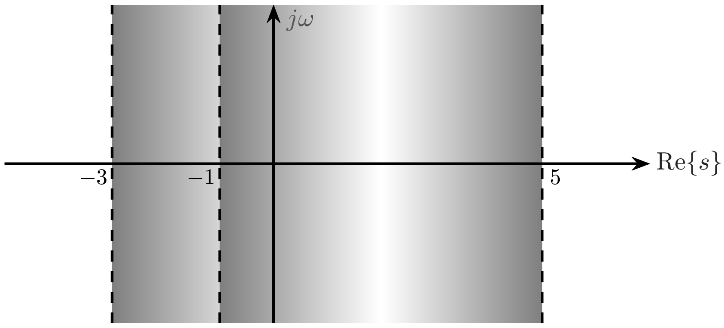
$$X_d(s) = \frac{2s+3}{(s+1)(s+2)} = \underbrace{\frac{1}{s+1}}_{\mathrm{Re}\{s\}<-1} + \underbrace{\frac{1}{s+2}}_{\mathrm{Re}\{s\}<-2} \;;\;\; \mathrm{Re}\{s\} < -2$$

Båda termerna motsvarar, och hanteras som, $X_1(s) \Longleftrightarrow x_1(t)$ i deluppgift a) (eller direkt från Tabell 5:14). Inverstransformen är därför

$$x_d(t) = -\left(e^{-t} + e^{-2t}\right)u_0(-t)$$

**e)**

$$X_e(s) = \frac{3s^2 - 2s - 17}{(s+1)(s+3)(s-5)} = \underbrace{\frac{1}{s+1}}_{\mathrm{Re}\{s\}>-1} + \underbrace{\frac{1}{s+3}}_{\mathrm{Re}\{s\}>-3} + \underbrace{\frac{1}{s-5}}_{\mathrm{Re}\{s\}<5} \; ; \; \underbrace{-1 < \mathrm{Re}\{s\} < 5}_{\text{(se figur)}}$$




På motsvarande sätt som i deluppgifterna a)–d) erhålls:

$$x_e(t) = \left(e^{-t} + e^{-3t}\right) u(t) - e^{5t} u_0(-t)$$