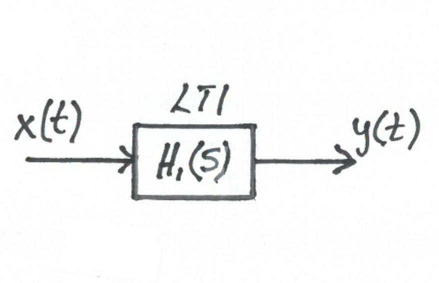
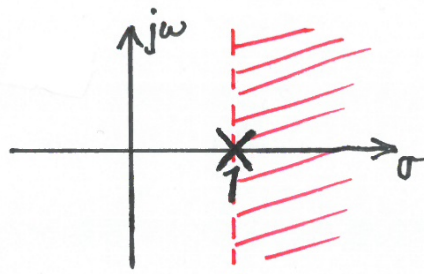


Stabilisering av instabila system

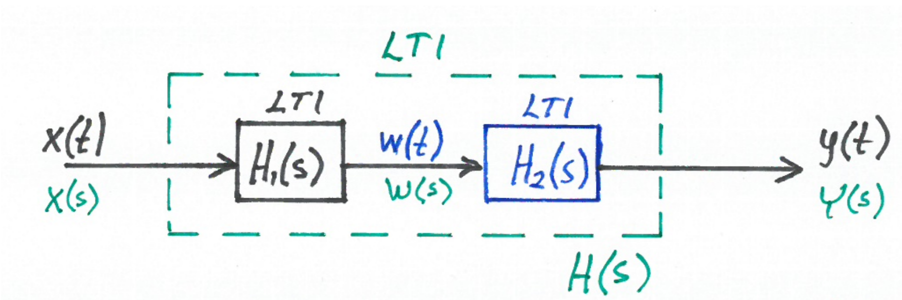
Givet: Ett **kausalt & instabilt** fysikaliskt system med systemfunktion $H_1(s)=\dfrac{1}{s-1};\quad \mathrm{Re}\{s\}>1.$

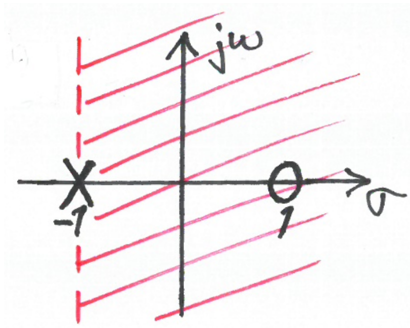




1. Stabilisering genom kaskadkoppling

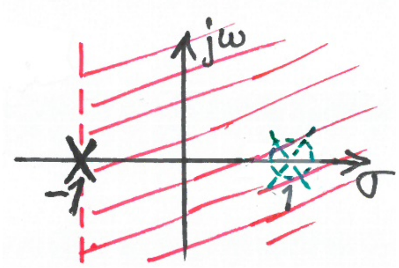
$H_2(s) = \dfrac{s-1}{s+1};\quad \mathrm{Re}\{s\}>-1$





$$Y(s)=W(s)H_2(s)=\big(X(s)H_1(s)\big)\cdot H_2(s)=X(s)\cdot \underbrace{H_1(s)H_2(s)}_{=H(s)}$$

$$\Rightarrow H(s) = H_1(s)H_1(s) = \frac{1}{s-1}\cdot\frac{s-1}{s+1} = \frac{1}{s+1};\quad \mathrm{Re}\{s\}>-1 \qquad \Longrightarrow$$



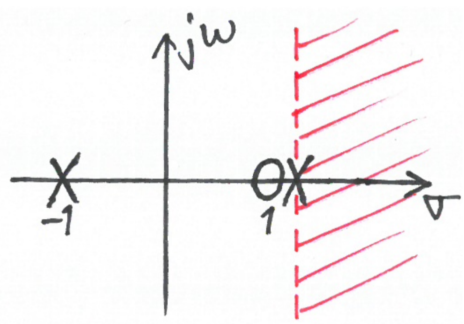
Imaginära axeln ligger i konvergensområdet för $H(s)$ $\Rightarrow$ Det totala (kausala) systemet är **stabilt**!

Dock: Vid minsta förändring av polen i $H_1(s)$ (dvs. en förändring i någon systemparameter hos det fysikaliska systemet) så blir det kaskadkopplade systemet också **instabilt**.

Exempel: Om polen i $s = 1$ hos $H_1(s)$ ändras +10% till $s = 1.1$

$$\Rightarrow H_1(s)=\frac{1}{s-1.1}$$

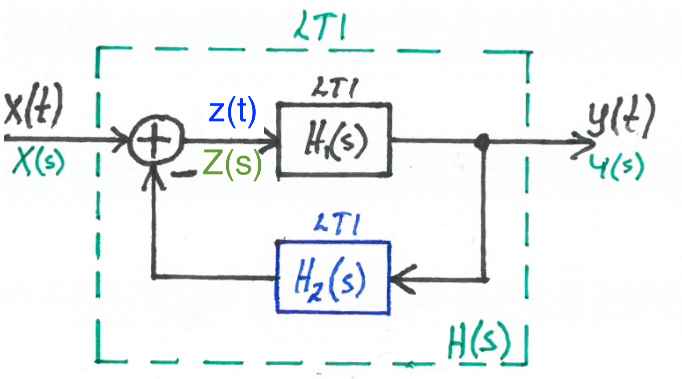
$$\Rightarrow H(s) = \frac{s-1}{(s-1.1)(s+1)};\quad \mathrm{Re}\{s\}>1.1$$

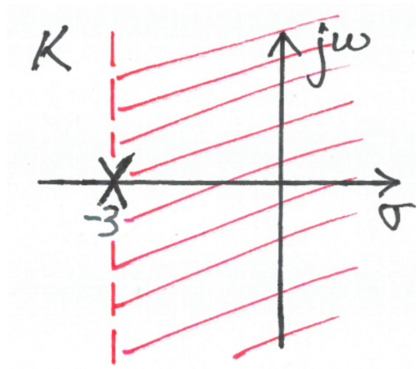


Stabilisering genom *kaskadkoppling* är därför, i praktiken, inte lämpligt/bra!

2. Stabilisering genom återkoppling

Det kausala instabila systemet H_1, med systemfunktion $H_1(s)$, återkopplas enligt nedan med ett kausalt stabilt system H_2, med systemfunktion $H_2(s)=\dfrac{K}{s+3}$; $\quad \mathrm{Re}\{s\}>-3$:





$$\begin{cases} Y(s)=Z(s)H_1(s) \\ Z(s)=X(s)-Y(s)H_2(s) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad H(s)=\frac{H_1(s)}{1+H_1(s)H_2(s)}=\frac{s+3}{(s+3)(s-1)+K}$$

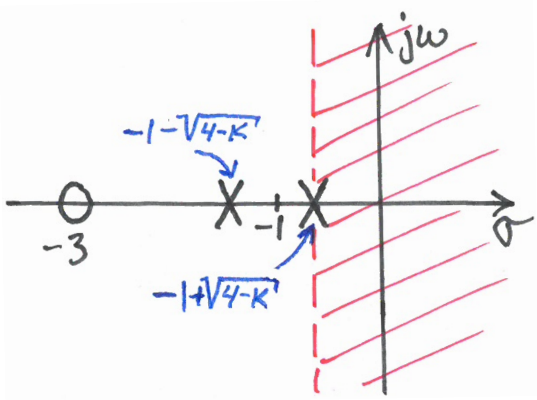
H_1 och H_2 är kausala $\Rightarrow$ totala systemet är kausalt $\Rightarrow$
Stabilt system om alla poler hos $H(s)$ ligger i vänster halvplan
(för då ligger den imaginära axeln i konvergensområdet för $H(s)$)**!**

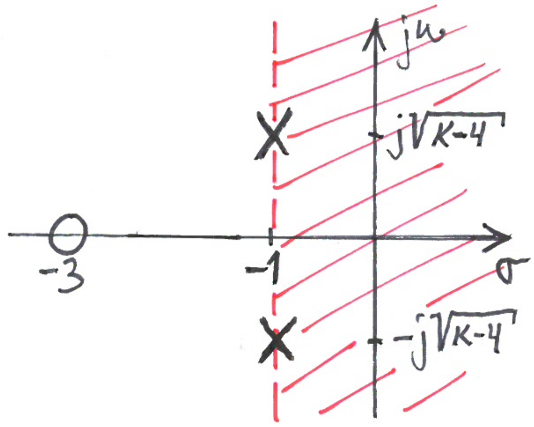
Polerna finns där $(s+3)(s-1)+K=0 \quad \Rightarrow$

- **Reellvärda poler** $\underline{\underline{s=-1\pm\sqrt{4-K}}}$ då $K\le 4$

  $\Rightarrow$ Stabilt system om $K>3$
  (*då ligger båda polerna i vänster halvplan*)

  (*Marginellt stabilt system då* $K=3$.
  $\Rightarrow$ *poler i s = –2 & s = 0*)



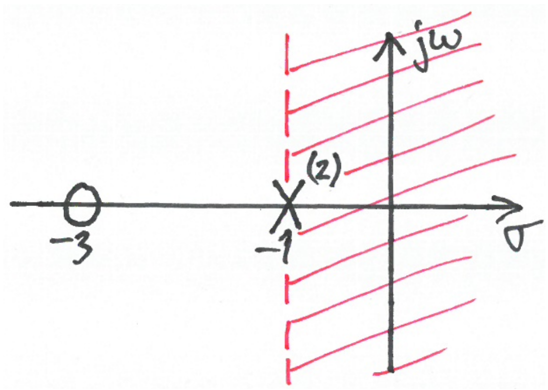


- **Komplexvärda poler** $\underline{\underline{s=-1\pm j\sqrt{K-4}}}$ då $K>4$

  $\Rightarrow$ Stabilt system för *alla* $K>4$.
  (*båda polernas realdel = –1 för alla* $K>4$)

Det återkopplade systemet är alltså stabilt för alla $K > 3$.

Låt t.ex. $K = 4 \Rightarrow H(s) = \dfrac{s+3}{(s+1)^2}$; $\mathrm{Re}\{s\} > -1$:



Låt återigen polen i $s = 1$ hos $H_1(s)$ ändras +10% till $s = 1.1$ (dvs. $H_1(s) = \dfrac{1}{s-1.1}$)

$\Rightarrow H(s) = \dfrac{s+3}{(s+1.4)(s+0.45)}$; $\mathrm{Re}\{s\} > -0.45$, dvs. polerna hos $H(s)$ hamnar i $s = -1.4$ & $s = -0.45$.

Om polen i $s = 1$ hos $H_1(s)$ i stället ändras −10% till $s = 0.9$ (dvs. $H_1(s) = \dfrac{1}{s-0.9}$)

$\Rightarrow H(s) = \dfrac{s+3}{(s+1.05)^2 + 0.44^2}$; $\mathrm{Re}\{s\} > -1.05$, dvs. polerna hos $H(s)$ hamnar i $s = -1.05 \pm j0.44$.

Slutsats:

Stabilisering m.h.a. återkoppling är mycket ”störtålig” mot polvariationer hos $H_1(s)$
(dvs. parametervariationer hos H_1.)

Återkoppling är mycket centralt inom reglerteknik!