Faltning

Energifritt LTI-system

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\mathcal{H}\{\bullet\}} \longrightarrow y(t)$$

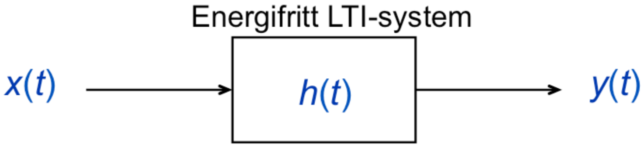
$\mathcal{H}$ = systemoperatorn; $y(t) = \mathcal{H}\{x(t)\}$

- Från def. av $\delta(t)$ följer: $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau$

$$\Longrightarrow \underline{y(t)} = \mathcal{H}\{x(t)\} = \mathcal{H}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau\right\} = /\text{Linjärt}/$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\mathcal{H}\{\delta(t-\tau)\}\,d\tau = /\text{Tids-invariant}/ = \underline{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau}$$

Faltning, forts.



$$\boxed{y(t) = (x * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)\,d\tau}$$

Faltningsintegralerna konvergerar garanterat om

$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\,dt < \infty$ och $|h(t)| < \infty$ eller $|x(t)| < \infty$ och $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt < \infty$

Räkneexempel – faltning

Ett visst LTI-system har impulssvaret $h(t) = e^{-t}u(t)$.

a) Beräkna systemets utsignal $y(t)$ då dess insignal är $x(t) = u(t) - u(t-2)$.

b) Är systemet kausalt och/eller stabilt?

c) Beräkna systemets stegsvar $g(t)$.

Stabilitet

Energifritt LTI-system

$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$

Vi vet: Stabilt LTI-system $\Leftrightarrow$ $y(t)$ begränsad för varje begränsad $x(t)$

Konsekvens:

$$\boxed{\text{Stabilt LTI-system} \quad \Leftrightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt < \infty}$$

Marginellt stabilt system $\Leftrightarrow$ $|h(t)| < \infty \quad \forall t$

men $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt = \infty$

Differentialekvationsbeskrivning av LTI-system

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

Ett tidskontinuerligt n:te ordningens diskret LTI-system kan vanligen beskrivas av en linjär n:te ordningens differentialekvation:

$$\boxed{a_0 y(t) + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = b_0 x(t) + \sum_{j=1}^{m} b_j \frac{d^j x(t)}{dt^j}}$$

Insignalen $x(t)$ ”släpps på” vid $t = t_0$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = \begin{cases} y_h(t) + y_p(t) & (1) \\ y_{zi}(t) + y_{zs}(t) & (2) \end{cases}}$$

- $y_h(t)$ & $y_{zi}(t)$ beror *inte* på $x(t)$
- $y_p(t)$ & $y_{zs}(t)$ beror på $x(t)$

- (1): $y_h(t)$ & $y_p(t)$ beror på $y(t_0+)$ ☹
- (2): $y_{zi}(t)$ beror på $y(t_0-)$, $y_{zs}(t)=(x*h)(t)$ ☺