Periodisk summa av sinusar

Låt $x(t) = A\sin(\omega_a t + \alpha) + B\sin(\omega_b t + \beta)$.

Om $\frac{\omega_a}{\omega_b} \in \mathbb{Q} \iff x(t)$ är T-periodisk, dvs. $x(t) = x(t+T)$

med $T = \frac{2\pi}{\omega_1}$, där $\boxed{\omega_1 = \text{SGD}(\omega_a, \omega_b)}$

Största Gemensamma Delare (SGD)
= Greatest Common Devisor (GCD)

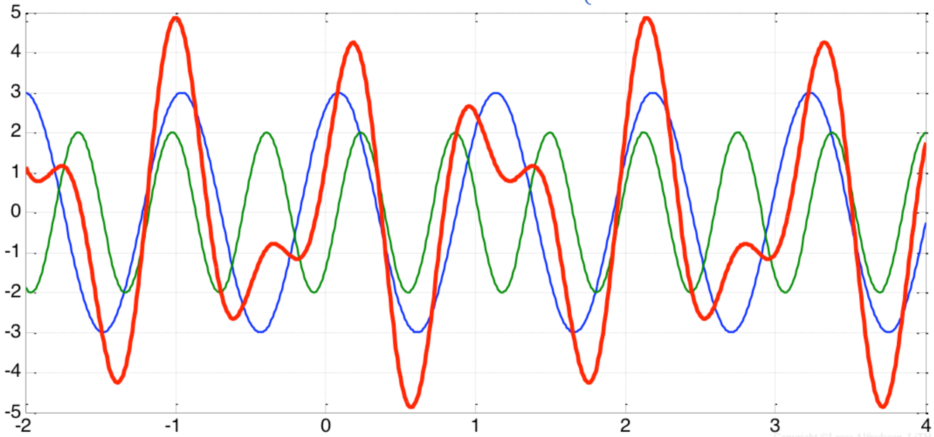
Exempel –
test av periodicitet:

$$\begin{cases} x(t) = 3\sin\left(6t + \frac{\pi}{3}\right) + 2\cos\left(10t - \frac{3\pi}{4}\right) \\ w(t) = 2\sin(9t) - 5\cos\left(\sqrt{3}t + \frac{\pi}{3}\right) + 3\sin\left(5t - \frac{\pi}{2}\right) \\ z(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}t - \frac{\pi}{2}\right) + 7\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right) \end{cases}$$

Summa av cos/sin

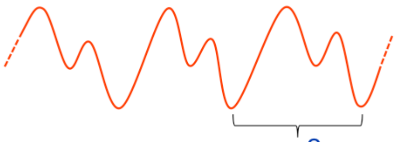
$$\underbrace{x(t)}_{\text{röd kurva}} = \underbrace{3\sin\left(6t+\frac{\pi}{3}\right)}_{\text{blå kurva}} + \underbrace{2\cos\left(10t-\frac{3\pi}{4}\right)}_{\text{grön kurva}}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\omega_a}{\omega_b} = \dfrac{6}{10} \in \mathbb{Q} \quad \Rightarrow \\ \omega_1 = \text{SGD}(6,10) = 2 \text{ rad/s} \\ \Rightarrow \quad T = \dfrac{2\pi}{\omega_1} = \pi \text{ sek} \end{cases}$$



Fourierserieutveckling av periodiska signaler

En fysikalisk T-periodisk signal $x(t)$, dvs. $x(t) = x(t+T)$, kan uttryckas som följande summa av sinusar:



$$T = \frac{2\pi}{\omega_1}$$

$$\boxed{x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{X}_k \sin(k\omega_1 t + \varphi_k)}$$

$\Leftrightarrow$ **Fourierserieutveckling** av $x(t)$

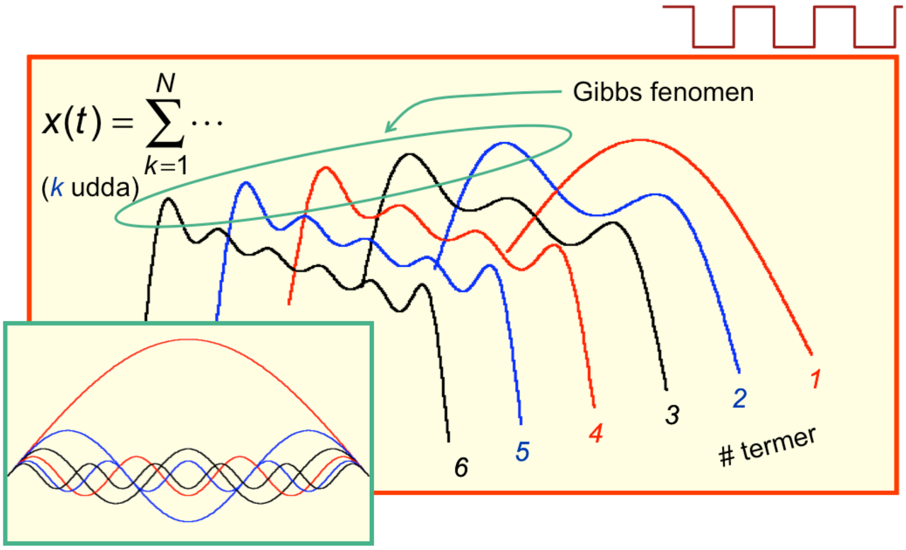
$\omega_1 = 2\pi f_1$: grundvinkelfrekvens

X_0: medelvärdesnivå

$f_1 = \dfrac{1}{T}$: grundfrekvens

$$\left.\begin{array}{l} \hat{X}_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1)\text{: grundton} \\ \hat{X}_k \sin(k\omega_1 t + \varphi_k),\ k = 2, 3, 4\ldots\text{: övertoner} \end{array}\right\}\ \text{deltoner}$$

Ex: Approximation av fyrkantvåg



Fourierserieutveckling

JAVA-demo:

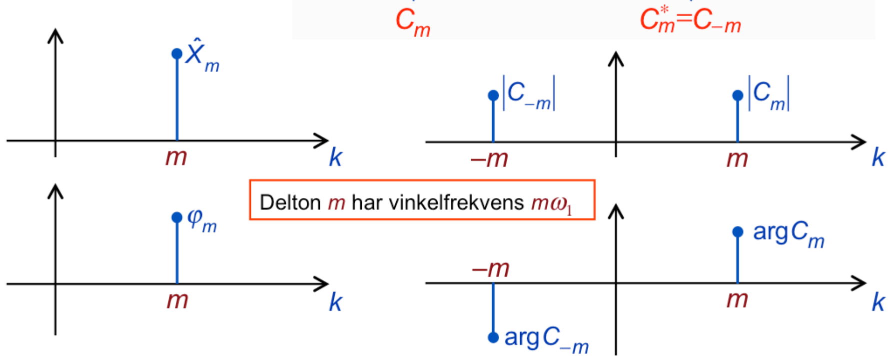
Generering av periodiska signaler med hjälp av (co)sinusformade basfunktioner:

www.falstad.com/fourier

OBS – testa även detta själv!

Spektrum – grafisk frekvensbeskrivning av signal

$$\hat{X}_m \sin(m\omega_1 t + \varphi_m) = \underbrace{\frac{\hat{X}_m}{2} e^{j\left(\varphi_m - \frac{\pi}{2}\right)}}_{C_m} \cdot e^{jm\omega_1 t} + \underbrace{\frac{\hat{X}_m}{2} e^{-j\left(\varphi_m - \frac{\pi}{2}\right)}}_{C_m^* = C_{-m}} \cdot e^{-jm\omega_1 t}$$

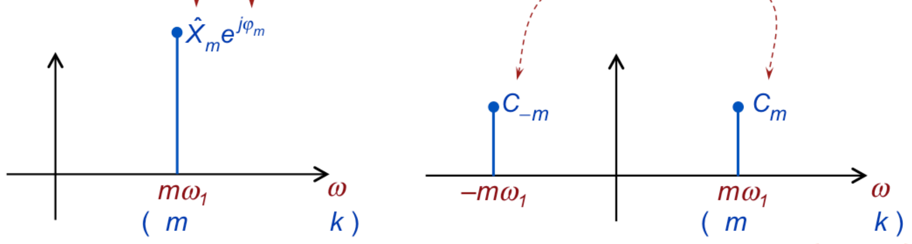


Enkelsidigt *amplitudspektrum* resp. *fasspektrum*

Dubbelsidigt *amplitudspektrum* resp. *fasspektrum*

Spektrum – grafisk frekvensbeskrivning av signal

$$\hat{X}_m \sin(m\omega_1 t + \varphi_m) = \underbrace{\frac{\hat{X}_m}{2} e^{j\left(\varphi_m - \frac{\pi}{2}\right)}}_{C_m} \cdot e^{jm\omega_1 t} + \underbrace{\frac{\hat{X}_m}{2} e^{-j\left(\varphi_m - \frac{\pi}{2}\right)}}_{C_m^* = C_{-m}} \cdot e^{-jm\omega_1 t}$$



Enkelsidigt
komplext spektrum

Dubbelsidigt
komplext spektrum

Antingen ω-axel eller k-axel

DENNA SIDA UTGÅR!!

Fourierserieutveckling, sammanfattn:

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_1 t} = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{X}_k \sin(k\omega_1 t + \varphi_k)}$$

Grundvinkelfrekvens $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$

Samband:

$$X_0 = C_0 = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} x(t)\,dt$$

$$\hat{X}_{k>0} = 2|C_k|$$

Amplitudspektrum

$$\varphi_{k>0} = \arg C_k + \frac{\pi}{2}$$

Fasspektrum

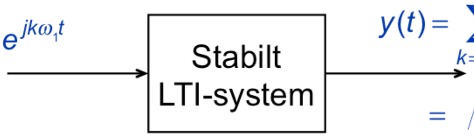
där $$\boxed{C_k = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} x(t)e^{-jk\omega_1 t}\,dt}$$

Komplexa fourierserie-koefficienter

$x(t)$ reellvärd $\Leftrightarrow$ $C_{-k} = C_k^*$

LTI-system: periodiskt in $\Longrightarrow$ periodiskt ut

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_1 t}$$



$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \cdot \mathcal{H}\left\{ e^{jk\omega_1 t} \right\}$$

$$= \big/ \text{Tavlan} \big/ = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k e^{jk\omega_1 t}$$

Ex.1: $y(t) = x(t - t_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_1 (t - t_0)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{C_k e^{-jk\omega_1 t_0}}_{D_k} e^{jk\omega_1 t}$

Ex.2: $y(t) = x'(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \dfrac{d\left(e^{jk\omega_1}\right)}{dt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{jk\omega_1 \cdot C_k}_{D_k} e^{jk\omega_1 t}$

<u>Ex. 2 $\Longrightarrow$ Allmänt samband:</u>

C_k för den periodiska signalen $x(t)$ kan erhållas från $C_{kx'}$ för derivatasignalen $x'(t)$:

$$\boxed{C_k = \frac{C_{kx'}}{jk\omega_1}}$$

Kretsberäkningar (här söks $y(t)$)

1. Fourierserieutveckla källsignalerna (t.ex. en källa $x(t)$)

2. Använd likströmsteori för källornas medelvärden ($X_0 \Rightarrow Y_0$)

3. Använd $j\omega$ -metoden för källornas deltoner:

$$\hat{X}_k \sin(k\omega_1 t + \varphi_k) \to X_k = \hat{X}_k e^{j\varphi_k} \qquad R,\ jk\omega_1 L,\ \frac{1}{jk\omega_1 C}$$

Beräkna sökt storhet på komplex form:

$$Y_k = \hat{Y}_k e^{j\psi_k} \quad \Rightarrow \quad \text{Delton } k\text{:}\ y_k(t) = \hat{Y}_k \sin(k\omega_1 t + \psi_k)$$

4. Superposition ger tidsuttrycket för sökt storhet:

$$y(t) = Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} y_k(t) = Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{Y}_k \sin(k\omega_1 t + \psi_k)$$

Signalmedeleffekt

Signal(medel)effekten P är ett *storleksmått* för en T-periodisk signal $x(t)$ (*jämför med elektrisk aktiv effekt*):

$$P = X_e^2 = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} |x(t)|^2\, dt$$

Parsevals formel/teorem:

$$\boxed{P = \frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2\, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_k|^2}$$

Bevis (*kolla själv!*):

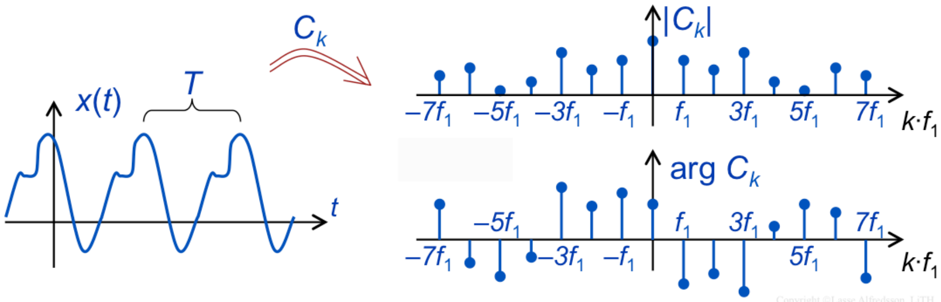
$$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2\, dt = X_e^2 = X_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{X}_{ke}^2 = \Big/\; X_{ke} \underset{\text{(sinus)}}{=} \frac{\hat{X}_k}{\sqrt{2}} = \frac{2|C_k|}{\sqrt{2}} \;\Big/ = C_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|C_k|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_k|^2$$

Fourieranalys & fouriersyntes

Fourier**analys**:

$x(t)$ och ω_1 (eller T) är givna. Bestäm $C_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_1 t}\,dt$

Signalens frekvensspektrum, dvs. C_k ritad som funktion av k, frekvens f eller vinkelfrekvens ω, är ofta av intresse.
Vanligen ritar man då amplitudspektrum och fasspektrum:



Fourieranalys & fouriersyntes

Fourier**syntes**:

C_k och ω_1 (eller T) är givna. Bestäm/skapa $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_1 t}$

I praktiska sammanhang nöjer man sig med en approximation: $x_M(t) = \sum_{k=-M}^{M} C_k e^{jk\omega_1 t}$