

Dokumentet utgör sidoinformation för den som vill repetera kunskaper om svängningar och resonans.

# Om svängningar och resonans

Anders Källén  
MatematikCentrum  
LTH  
anderskallen@gmail.com

## Sammanfattning

Här diskuterar vi andra ordningens linjära differentialekvationer som har lösningar som utgör svängningar, dämpade eller odämpade. Mer precist, om vi stör jämviktsläget (som är noll), så får vi en periodisk lösning till ekvationen, med en frekvens som kallas systemets egenfrekvens. Speciellt tittar vi på vad som händer när vi påverkar systemet med en periodisk yttre kraft med en frekvens som är lika med denna egenfrekvens, det fenomen som kallas resonans.

## 1 Introduktion

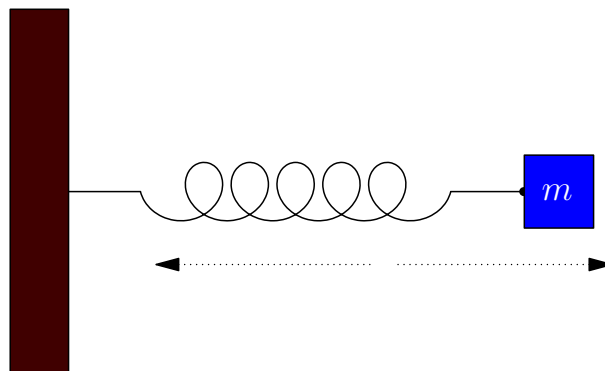
Här ska vi diskutera några tillämpningar av andra ordningens linjära differentialekvationer. Det gemensamma för dem är att det handlar om svängningar, och då fr.a. sådana som är av pendelkaraktär. Vi börjar med att diskutera situationer där vi inte har någon dämpning och ingen yttre kraft som påverkar systemet, för att sedan först införa dämpning och slutligen en yttre kraft. Vi börjar med att studera lösningar till den homogonea ekvationen, d.v.s. vad som händer när vi stör systemet när det är jämvikt. Vi är intresserad av när vi får en svängande rörelse, såsom när man sätter igång en gunga som hänger ner från början. En sådan svängning kallar vi systemets egensvängning. Med dämpning ser vi, föga förvånande, att motsvarande situation leder till en dämpad svängning, så att systemet vill återgå till jämviktsläget. Mest intressant blir det när vi lägger på en yttre kraft med en period som lika med systemets egensvängning, eftersom vi då får en förstärkt svängning - resonans.

## 2 Den elastiska pendelns ekvation

En *elastisk pendel* består av en massa  $m$  som hängts upp i en fjäder. Låt  $y$  mäta massans avvikelse från jämviktsläget. När fjädern dras ut och släpps svänger massan periodiskt kring sitt jämviktsläge. Den *återförande kraften*  $F$  är en funktion av utslaget  $y$  i förhållande till jämviktsläget och om inga andra krafter (typ friktion) är inblandade, säger Newtons andra lag att massan gånger accelerationen är lika med den återförande kraften, alltså

$$my''(t) = F(y(t)).$$

Om svängningarna är små, gäller att vi åtminstone approximativt kan sätta  $F(y) = -ky$  (Hookes lag), där proportionalitetskonstanten  $k$  kallas *fjäderkonstanten*. (Notera att  $F(0) = 0$ ; i jämviktsläget är ingen återförande kraft inblandad.)



Om vi antar att Hookes lag gäller, så kan vi skriva differentialekvationen som

$$y''(t) + \omega_0^2 y(t) = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

där  $\omega_0$  kallas *vinkelfrekvensen*. Denna ekvation har lösningen

$$y(t) = a \cos(\omega_0 t) + b \sin(\omega_0 t) = A \sin(\omega_0 t + \phi),$$

där  $A = \sqrt{a^2 + b^2}$  är svängningens *amplitud* och  $\phi$  kallas *faskonstanten*; hela uttrycket  $\omega_0 t + \phi$  kallas *fasvinkeln*.

Tiden det tar innan en periodisk rörelse upprepar sig heter *svängningstid* och betecknas med  $T$ . I vårt fall ges den av

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Antalet perioder per sekund,  $f = 1/T$ , kallas frekvensen, vilket betyder att  $\omega_0 = 2\pi f$ . Vi mäter oftast  $f$  i enheten Hertz (1 Hz är 1/s) och  $\omega$  i rad/s.

**Exempel 1** Betrakta en pendel som är upphängd i en punkt. En matematisk pendel är en idealisering av en sådan som innebär att vi har en punktformad kropp med massan  $m$  som rör sig i en cirkelbåge på avståndet  $l$  från upphängningsplatsen. Med andra ord, upphängningsanordningen väger ingenting och det som svänger är endast en punkt. Denna typ av idealiseringar fungerar ofta som första approximationer för verkliga fenomen, och renodlar det matematiska innehållet. Bland fenomen som vi kan idealisera på detta sätt är pendeln i ett pendelur och ett barn i en gunga.

För att matematiskt beskriva den här situationen vill vi använda utslagsvinkeln  $\theta$  i figuren till höger som avvikelse från jämviktsläget  $\theta = 0$ . Vi vill beskriva hur den varierar med tiden  $\theta = \theta(t)$ .

Sträckan som punkten rör sig från viloläget blir nu lika med  $y(t) = l\theta(t)$  och av figuren framgår att den återförande kraften ges av  $F(\theta) = mg \sin \theta$  när vinkelutslaget är  $\theta$ . Newtons andra lag innebär då att

$$ml\theta''(t) = -mg \sin \theta(t).$$

Men vi vet att approximativt gäller att  $\sin \theta \approx \theta^1$ , så för små utslag gäller att

$$ml\theta''(t) = -mg\theta(t) \quad \Leftrightarrow \quad \theta''(t) + \omega_0^2\theta(t) = 0$$

där

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

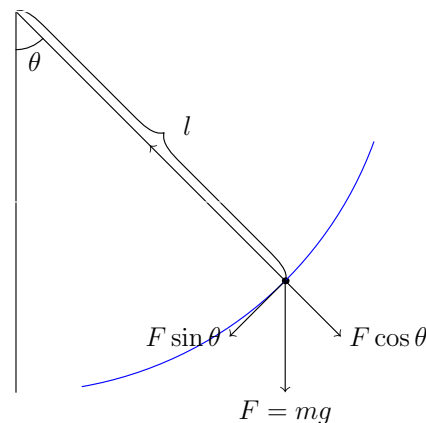
Det som bestämmer hur pendeln svänger är nu hur vi sätter igång den. Om vi vrider upp den en vinkel  $\theta_0$  och sedan släpper den, så får vi en svängning som bestäms av startvillkoret

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \theta'(0) = 0.$$

Om vi dessutom ger den en "putt", så får vi ändra det andra startvärdet till  $\theta'(0) = v$ , där  $v$  är den vinkelhastighet pendeln har när den sätts igång.

*Anmärkning* Vi ser speciellt att pendeln har en svängningsperiod som ges av

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$



Eftersom jorden inte är en perfekt sfär, utan snarare en ellipsoid, varierar gravitationskonstanten  $g$  med var vi är på jordytan. I princip kan vi då använda en (matematisk) pendel till att bestämma  $g$  på en given plats, genom att bestämma perioden för en pendel vars längd är känd. Detta låter dock enklare än vad det är, men man kan bygga vidare på idéerna (användande den fysikaliska pendeln nedan) och konstruera en speciell pendel, *reversionspendel*, med vilken detta kan göras.

**Exempel 2** *Ett välkänt exempel på när man utnyttjar att föremål har egenfrekvensener är stämgauffeln. När man slår till den, börjar den vibrera med en speciellt frekvens, och alltså generera en speciell ton, med vars hjälp (och fenomenet svävning) man kan stämma andra instrument.<sup>2</sup>*

**Exempel 3** *Andra ordningens differentialekationer dyker upp i den grundläggande elläran.*

I figuren till höger har vi en s.k. LC-krets som består av en spole och en kondensatorn som är seriekopplade. I ett seriekopplat system är strömstyrkan  $i(t)$  lika stor överallt, och om vi låter  $v_L$  vara spänningen över spolen och  $v_C$  spänningen över kondensatorn, så gäller för spolen att

$$v_L(t) = Li'(t)$$

medan det för kondensatorn gäller att

$$i(t) = Cv'_C(t).$$

Vidare säger Kirchoffs lagar att spänningssumman är noll,  $v_L + v_C = 0$ , så vi ser att

$$CLi''(t) = Cv'_L(t) = -Cv'_C(t) = -i(t),$$

d.v.s.

$$i''(t) + \omega_0^2 i(t) = 0, \quad \text{där} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

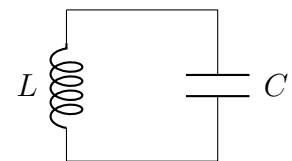
Vi ser att lösningen på detta är en harmonisk svängning enligt följande definition.

**Definition** En svängning på formen

$$A \sin(\omega t + \phi)$$

kallas en *harmonisk svängning*.

*Anmärkning* Vi kan förstå LC-kretsen utifrån ett elektromagnetiskt perspektiv på följande sätt. Kondensatorn lagrar energi från det elektriska fältet mellan sina plattor, beroende på hur stor spänningen är, och spolen lagrar energi från det magnetiska fältet, beroende av hur stor strömstyrkan genom den är. Om vi nu kopplar en spole till en laddad kondensator kommer ström att gå genom spolen och då bygga upp ett magnetiskt fält runt det. Samtidigt reduceras spänningen över kondensatorn och när det inte finns någon laddning kvar i kondensatorn, och alltså spänningen är noll, så kommer strömmen ändå att fortsätta, eftersom spolen motverkar ändringar i strömstyrkan. Härigenom laddas kondensatorn upp med en spänning med motsatt tecken. Denna ström drivs av en minskning i det magnetiska fältet, så den energi som behövs för att ladda kondensatorn tas från det magnetiska fältet. När det magnetiska fältet helt försvunnit är nu istället kondensatorn fullständigt laddat och cykeln startar om igen.



### 3 Mer om pendlar

En fysikalisk pendel skiljer sig från en matematisk pendel genom att massan har en utsträckning och upphängningen en massa. Ett barn som sitter i en gångna är inte en punkt, ej heller den pendel som sitter i en Moraklocka. Vi ska nu se hur man kan modifiera ekvationen så att den tar hand om riktiga pendlar också. För det modifierar vi först ekvationen så att den får formen

$$-mgl \sin \theta(t) = ml^2 \theta''(t). \quad (1)$$

Vi ska nu ge en alternativ tolkning av denna ekvation, vilken ska göra det möjligt för oss att generalisera till verkliga pendlar.

Vänsterledet i (1) kan tolkas som gravitationskraftens (med storlek  $mg$  och riktad rakt ned) vridmoment relativt upphängningspunkten. Newtons andra lag innebär att vridmomentet  $\tau$  relativt en punkt  $P$  är lika med  $I_P \alpha$ , där  $I_P$  är kroppens tröghetsmoment med avseende på punkten  $P$  och  $\alpha$  är vinkelaccelerationen kring  $P$ .  $I_P = ml^2$  är punktens tröghetsmoment relativt upphängningspunkten, så (1) är precis Newtons lag för vridningar av en punktmassa runt en punkt.

Vi kan bestämma rörelsen av en fysikalisk pendel genom att istället bestämma rörelsen av dess masscentrum (alltså tyngdpunkt)  $CM$ . Om kroppens tröghetsmoment relativt dess tyngdpunkt är  $I_{CM}$ , så gäller att dess tröghetsmoment relativt en punkt  $P$  på avståndet  $l$  från masscentrum enligt det s.k. parallellaxelteoremet (eller Steiners sats) är

$$I_P = I_{CM} + ml^2,$$

där  $m$  är pendelns massa. Det följer att ekvationen för den fysikaliska pendeln blir

$$-mgl \sin \theta(t) = I_P \theta''(t) = (I_{CM} + ml^2) \theta''(t).$$

För små pendelutslag får vi igen (den approximativa) ekvationen

$$\theta''(t) + \omega_0^2 \theta(t) = 0, \quad \text{där} \quad \omega_0^2 = \frac{mgl}{I_{CM} + ml^2}.$$

Så matematiken är densamma, det är bara ingångsdata som först ska transformeras.

**Exempel 4** Om den fysikaliska pendeln utgörs av en liten kula med massa  $m$  och radien  $r$  så blir  $I_{CM} = 2mr^2/5$  och alltså

$$\omega_0 = \frac{mgl}{\frac{2}{5}mr^2 + ml^2} = \sqrt{\frac{g}{l}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2r^2}{5l^2}}} \rightarrow \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \text{då} \quad r \rightarrow 0,$$

alltså då kulan blir en punkt.

**Exempel 5** En ring med massan  $m$  och radien  $r$  som hänger i en punkt på den (som örhänget i figuren till höger) har tröghetsmomentet kring en axel genom dess masscentrum som är  $mr^2$ . Det betyder att svängningsperioden kommer att bli

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{mr^2 + mr^2}{mgr}} = \sqrt{\frac{2r}{g}},$$

eftersom i detta fall är  $l = r$ . Om ringen har en diameter på kring 10 cm blir perioden ungefär 0.6 s.

F.ö. gäller att när vi promenerar svänger vi alternerande benen i pendelrörelser. Om vi approximerar benen med en tunn stav med längd  $l$ , så gäller att  $I_{CM} = ml^2/12$ , från vilket vi ser att

$$\omega_0^2 = \frac{3g}{2d}.$$

Med en benlängd på  $d = 1$  meter blir periodlängden ungefär 1.6 s, så varje steg tar ungefär 0.8 s. Vi ser att örhänget svänger ungefär i takt med gången.

Innan vi avslutar detta avsnitt, några ord om den inverterade pendeln. Om vi istället för att låta pendeln hänga ner i sin upphängspunkt, tar och vrider den ett halvt varv, så kommer den i ett annat jämviktsläge. Om vi skriver  $\phi = \pi - \theta$ , så blir pendelns ekvation

$$mgl \sin \phi = mgl \sin(\pi - \theta) = I_P \theta'' = -I_P \phi'',$$

vilket för små utslag blir den approximativa differentialekvationen

$$\phi'' - \omega_0^2 \phi = 0, \quad \text{där} \quad \omega_0^2 = \frac{mgl}{I_{CM} + ml^2}.$$

Vi ser att jämviktsläget är instabilt; lösningarna på denna ekvation har formen

$$\phi(t) = Ae^{\omega_0 t} + Be^{-\omega_0 t}.$$

Här kommer den första termen att växa (till sitt absolutbelopp) då  $t$  ökar, och alltså kommer  $\phi(t)$  att öka. Det betyder att jämviktstillståndet är instabilt, vilket stämmer väl med våra erfarenheter av att ställa en tunn pinne på högkant.

## 4 Dämpade svängningar

I praktiken sker det alltid energiförluster under svängningar, såsom friktion eller något liknande. Det betyder att förutom den återförande kraften finns också en bromsande kraft. Om vi antar att den är proportionell mot hastigheten, vilket är en vanlig approximation, så får Newtons ekvation formen

$$my''(t) = -ky(t) - by'(t).$$

Här inför vi vinkelfrekvensen  $\omega_0$  som ovan, samt en dämpningsfaktor  $\zeta$  som definieras genom att vi skriver  $b = 2\zeta\omega_0$ . Ekvationen får då formen

$$y''(t) + 2\zeta\omega_0 y'(t) + \omega_0^2 y(t) = 0.$$

Rötterna till dess karakteristiska polynom

$$r^2 + 2\zeta\omega_0 r + \omega_0^2$$

ges då av

$$r_{\pm} = \omega_0(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}).$$

Vi har nu tre fall:

- a) Om  $\zeta > 1$  har vi två reella rötter, vilka då båda är negativa, och den homogena lösningen ges av

$$y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t},$$

som snabbt blir noll. Ett sådant system sägs vara överdämpat.

- b) Om  $0 < \zeta < 1$  har vi två komplexa rötter. Då ges den allmänna lösningen till den homogena ekvationen av

$$y(t) = e^{-\zeta\omega_0 t} (A \cos(\omega_d t) + B \sin(\omega_d t)), \quad \omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}.$$

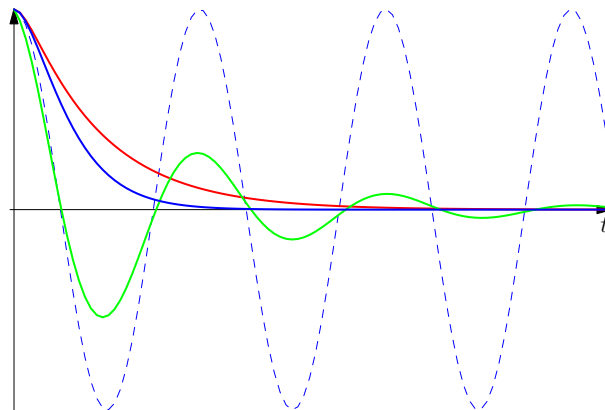
Lösningarna går nu också mot noll, men svängande. Systemet sägs vara underdämpat.

- c) När  $\zeta = 1$  har vi en reell dubbelrot och lösningen till den homogena ekvationen ges då av

$$y(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t}$$

som är den lösning som snabbast går mot noll. Systemet sägs vara kritiskt dämpat.

Dessa fall är illustrerade i figuren nedan. Den sträckade kurvan är fallet  $\zeta = 0$ , då svängningen, som alltså är en harmonisk svängning, är odämpad. Den blå, heldragna, kurvan är det kritiskt dämpade fallet – det är i den situationen som systemet återvänder till sitt jämviktstillstånd snabbast.



**Exempel 6** Vi om vi tar pendeln som exempel, så sker energiförluster typiskt genom friktion när pendeln svänger fram och tillbaka. Om vrider pendeln och släpper den, så är det klart att om friktionen är riktigt stor, så kommer pendeln att bara långsamt ta sig ner till sitt minimivärde, som för den röda kurvan. Är friktionen mindre, men finns, så kommer pendeln att svänga fram och tillbaka, med allt mindre amplitud för varje svängning, som i den gröna kurvan. Slutligen, om det inte finns någon friktion alls, kommer pendeln att svänga fram och tillbaka utan att amplituden avtar alls.

*Anmärkning* Lägg märke till att i fallet med en dämpad svängning, alltså fallet b) ovan, så kommer svängningsperioden inte att vara  $T = 2\pi/\omega_0$ , utan  $T = 2\pi/\omega_d$ , som beror både av  $\omega_0$  och  $\zeta$ . När  $\zeta \rightarrow 1$  gäller att  $T \rightarrow \infty$ , vilket svarar mot att den dämpade svängningen övergår i det kritiskt dämpade fallet. Denna representerar därför ett gränsfall av dämpad svängning med oändligt lång period.

## 5 En odämpad, tvungen, svängning

Om man vill få ett mekaniskt system att svänga med konstant amplitud måste man tillföra energi för att kompensera för mer eller mindre stora förluster. När energitillförseln sker med en frekvens som överensstämmer med systemets *egenfrekvens* kan en lite påverkan ge svängningen en stor amplitud, vilket kallas *resonans*. Med lika stor påverkan men med en frekvens som rejält avviker från egenfrekvensen blir svängningsamplituden mycket mindre. De flesta mekaniska system har många sådana resonansfrekvenser, medan en pendel endast har en (tänk på en gunga).

Antag att vår elastiska fjäder utsätts för en yttre drivande kraft. Vi kan t.ex. gunga barnet i gungan genom att periodiskt skjuta på gungan. Den drivande kraften ska då in i högerledet för Newtons tredje lag, och vi får efter omskrivning ekvationen på formen

$$y''(t) + 2\zeta\omega_0 y'(t) + \omega_0^2 y(t) = f(t),$$

där  $f(t)$  är den drivande kraften dividerat med massan  $m$ .

Det fall vi är intresserade av är när den drivande kraften är periodisk:

$$f(t) = B \sin(\omega t)$$

för någon frekvens  $\omega$ . Här kan vi anta att  $B = 1$ , ty om vi löser problemet med detta  $B$ , så får vi lösningen till det ursprungliga problemet genom att multiplicera lösningen för  $B = 1$  med  $B$ . Vidare är vi intresserade av situationen när den karakteristiska ekvationen har komplexa rötter, så vi antar att  $0 \leq \zeta < 1$ . I den situationen är det typiskt enklare att betrakta den komplexa differentialekvationen

$$y''(t) + 2\zeta\omega_0 y'(t) + \omega_0^2 y(t) = e^{i\omega t}.$$

Om vi löser den, så blir lösningens imaginärdel lösningen till den ursprungliga ekvationen. Det vi framför allt är intresserade av är att förstå hur lösningen ser ut efter lång tid.

Vi vet då från den allmänna teorin för linjära differentialekvationer<sup>3</sup> att den allmänna lösningen är summan av den allmänna homogena lösningen, som vi bestämde i föregående avsnitt, och en partikulärlösning. För att hitta en partikulärlösning skriver vi

$$y(t) = z(t)e^{i\omega t}$$

och ser då efter lite räkningar att  $z(t)$  ska uppfylla ekvationen

$$z'' + 2(i\omega + \zeta\omega_0)z' + (-\omega^2 + 2i\zeta\omega_0\omega + \omega_0^2)z = 1.$$

Om koefficienten framför  $z$  här är  $\neq 0$ , så ser vi att en partikulärlösning ges av

$$y_p(t) = \frac{e^{i\omega t}}{2i\zeta\omega_0\omega + \omega_0^2 - \omega^2},$$

och lägger vi till den homogena lösningen har vi bestämt den allmänna lösningen.

För att koefficienten framför  $z$  ska vara noll måste både real och imaginärdel vara, vilket i sin tur betyder att  $\zeta = 0$  och att  $\omega = \omega_0$ . I det fallet blir ekvationen  $z'' + 2i\omega_0 z' = 1$  och om vi tar  $z$  sådan att  $z' = 1/2i\omega_0$ , alltså t.ex.  $z(t) = t/2i\omega_0$ , så får vi partikulärlösningen

$$y_p(t) = -\frac{2ie^{i\omega_0 t}}{\omega_0}.$$



Det vi kommit fram till är viktigt, så låt oss sammanfatta situationen. Vi har väsentligen två fall.

Om vi inte har någon dämpning, alltså  $\zeta = 0$ , så har ekvationen

$$y''(t) + \omega_0^2 y(t) = e^{i\omega t}$$

lösningen

$$y(t) = Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t} + \frac{e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

om  $\omega \neq \omega_0$ , men

$$y(t) = Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t} - \frac{2ite^{i\omega_0 t}}{\omega_0}$$

om  $\omega = \omega_0$ . I det förra fallet har vi svängningar med begränsad amplitud, medan vi i fallet  $\omega = \omega_0$  får en svängning som har en ständigt tilltagande amplitud. Med andra ord, tonen  $\omega_0$  tilltar mer och mer i styrka. Det är detta vi kallar resonans.

I fallet när  $0 < \zeta < 1$  så gäller att den homogena lösningen går mot noll med tiden. Den delen av lösningen märks därför endast en kort stund, och kallas i svengelskan en *transient*. Partikulärlösningen däremot är en svängning med frekvensen  $\omega$  och amplitud

$$\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega_0^2\omega^2\zeta^2}}.$$

Uttrycket innanför kvadratroten kan skrivas

$$\begin{aligned} & (\omega_0^4 - 2\omega_0^2\omega^2(1 - 2\zeta^2) + \omega^4) \\ &= (\omega^2 - \omega_0^2(1 - 2\zeta^2))^2 + \omega_0^4(1 - (1 - 2\zeta^2)^2) \end{aligned}$$

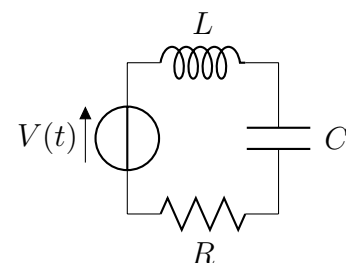
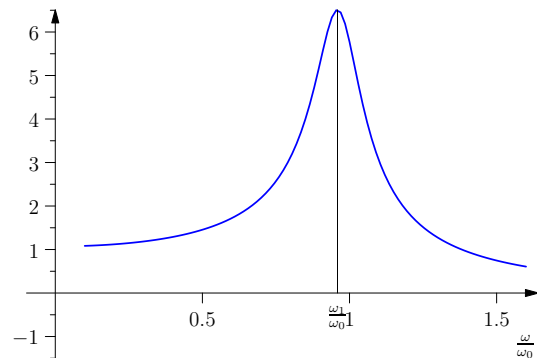
vilket har sitt minimum då  $\omega_1 = \omega_0\sqrt{1 - 2\zeta^2}$ . Det är alltså den frekvens som ger maximal amplitud för lösningen till differentialekvationen.

**Exempel 7** Även den "fullständiga" andra ordningens linjära differentialekvation med konstanta differentialekvationer dyker upp i ellära. Dämpningen åstadkoms då genom att man inför ett motstånd i kretsen.

I figuren till höger har vi en s.k. RLC-krets som i det här fallet består av ett motstånd, en spole och en kondensator om är seriekopplade, tillsammans med en spänningskälla. Enligt Ohms lag gäller att  $v_R = Ri$ , där  $i$  är kretsens strömstyrka, så Kirchoffs spänningslag  $v_R(t) + v_C(t) + v_L(t) = V(t)$  ger nu att (se Exempel 3)

$$i''(t) + \frac{R}{L}i'(t) + \frac{1}{LC}i(t) = V(t).$$

Jämfört med Exempel 3 har vi alltså dels infört en drivande kraft i form av spänningskällan, dels infört en dämpande faktor i form av motståndet,



**Exempel 8** *Principen bakom radion är att en radiostation sänder ut radiovågor med information om tal eller musik i form av elektromagnetiska vågor. Dessa tolkas och omvandlas sedan till informationen i radioapparater. Det radiostationen sänder ut är en högfrekvent elektromagnetisk våg, kallad bärvågen, som har modifierats enligt det önskade ljudet. Innan den digitala tidsåldern kunde detta göras på två olika sätt: man kunde antingen manipulera amplituden på bärvågen, vilket leder till en AM (amplitudmodulerad) radio, eller så kunde man manipulera frekvensen, vilket leder till en FM (frekvensmodulerad) radio. Som tillämpning på teorin i denna artikel ska vi titta närmare på aspekter av hur en AM radio fungerar.*

*För att förenkla diskussion lite antar vi att bärvågen är en enkel sinusvåg med frekvens  $f_c$ , vilken typiskt ligger i storleksordningen 600-1500 kHz, vilket ska jämföras med det hörbara spektrat som är omkring 0-15 kHz. Antag nu att vi vill sända en ton med frekvens  $f_a$  i det hörbara spektrat. Radiostationen modulerar då signalen, så att den istället för vågen  $\sin(2\pi f_c t)$  sänder ut vågen*

$$(1 + 2c \cos(2\pi f_a t)) \cdot \cos(2\pi f_c t),$$

där  $c$  är ett tal mellan 0 och 1/2. Men detta uttryck kan vi skriva om som

$$\cos(2\pi f_c t) + \cos(2\pi(f_c + f_a)t) + \cos(2\pi(f_c - f_a)t).$$

*Den modulerade signalen sänder alltså ut sidobands-frekvenserna  $f_c + f_a$  och  $f_c - f_a$ , förutom bärsignalsfrekvensen  $f_c$ .*

*Anmärkning* För att få bra ljud för t.ex. musik måste man här använda frekvenser på upp till 15 kHz i sidobanden, men reglerna för AM radio är satta så att varje station endast får använda frekvenser på 5 kHz på var sida om bärsignalsfrekvensen. Alltså kommer man bara åt en del av det hörbara spektrat, som därför lämpar sig bättre för tal än för musik.

*En gammal klassisk AM radio fungerade i princip så att en elektrisk krets i radion påverkas av de frekvenser man ställer in den på som finns i etern. Det betyder att den drivande ekvationen är*

$$y''(t) + 2\zeta\omega_0 y'(t) + \omega_0^2 y(t) = f(t)$$

där vänsterledet beskriver kretsen, där  $\omega_0$  är den frekvens man ställer in radion på och  $0 < \zeta < 1$ , medan  $f(t)$  den yttre vågen. Liksom tidigare, antag för enkelhets skull att  $f(t) = e^{i\omega t}$ . Då såg vi i föregående avsnitt att vi får maximal amplitud på  $y(t)$  när  $\omega_0$  kommer nära den maximala frekvensen  $\omega_1$ , så det vi gör när vi försöker hitta en viss station är att skruva till den elektriska kretsen så att bärvågens frekvens blir resonansfrekvens för kretsen.

## 6 Den svängande strängen

Hittills har vi tittat på problem som utgörs av s.k. begynnelsevärdesproblem, d.v.s. vi har en linjär andragsgradsekvation och för att få lösningen bestämd lägger man villkor på funktionen och dess derivata i en punkt, vanligen då  $t = 0$ . Sådana problem kallas begynnelsevärdesproblem.

Det finns emellertid en annan typ av problem som också är viktiga. En svängande sträng av längd  $l$  som är fäst i ändarna kan också beskrivas av en andra ordningens linjär differentialekvation, men då är situationen lite annorlunda. Den ekvation som driver strängen är egentligen en partiell differentialekvation som kallas vågekvationen, och funktionen  $y(t, x)$  som beskrivs är avvikelsen för strängen vid platsen  $x$  vid tidpunkten  $t$  från jämviktsläget. Men en sådan lösning kan visas vara en summa av lösningar på formen  $y(t, x) = a(t)u(x)$ , där  $u(x)$  ska lösa ekvationen

$$u''(x) + \omega_0^2 u(x) = 0.$$

Dess lösningar kommer att definierar vilka frekvenser som produceras av den svängande strängen, och vi vet att den allmänna lösningen till denna ekvation är

$$u(x) = A \cos(\omega_0 x) + B \sin(\omega_0 x).$$

Men nu har vi bivillkoret

$$u(0) = 0, \quad u(l) = 0,$$

eftersom vi antar att strängen är fäst i sina ändar, så dessa kan inte röra sig. Det gör att alla frekvenser  $\omega_0$  inte kan förekomma, utan bara vissa.

För att se det, notera först att eftersom  $u(x) = 0$  måste  $A = 0$ . Lösningen måste alltså vara på formen  $u(x) = B \sin(\omega_0 x)$ . Men det andra villkoret,  $u(l) = 0$ , medför då att

$$B \sin(\omega_0 l) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B = 0 \text{ eller } \omega_0 l = n\pi$$

för något heltal  $n$ . Det betyder att endast  $\omega_0$  på formen  $n\pi/l$  kan förekomma. Vi ser här att vi får en basfrekvens,  $\pi/l$ , svarande mot  $n = 1$ , och sedan en övertonsserie av frekvenser som är proportionella mot dessa. Detta är övertonsserien som uppkommer när vi slår till en gitarrsträng.

Historien kring detta är emellertid intressantare i ett sammanhang när vi kan närmare diskutera varifrån ekvationerna kommer, och olika variationer på den. Så vi nöjer oss med denna observation här.

## Noteringar

1. Den icke-linjära ekvationen diskuteras i artikeln *Den matematiska pendeln*.
2. Egentligen är situationen här mer komplicerad, se sista avsnittet
3. Se t.ex. *Om lösandet av linjära (ordinära) differentialekvationer*