

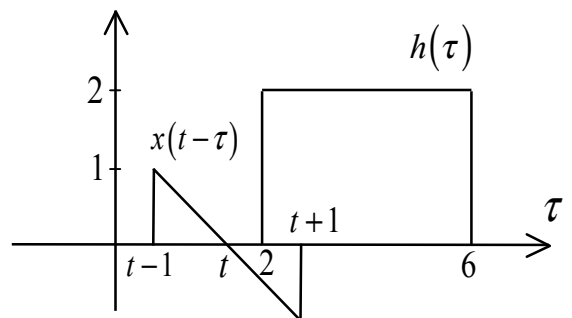
1.

- a) FALSKT: Vid kaskadkopplingen gäller att impulssvaren *faltas*, dvs. $h(t) = (h_1 * h_2)(t)$
- b) SANT: Tidsinvariant system medför att det, för insignalen $\tilde{x}(t) = x(t - t_0)$, ger utsignalen $\tilde{y}(t) = y(t - t_0)$.
Test: $\tilde{y}(t) = \sin(\tilde{x}(t)) = \sin(x(t - t_0)) = y(t - t_0)$, dvs. systemet är tidsinvariant.
- c) FALSKT: Impulssvaret för ett marginellt stabilt system är begränsat, men inte absolutintegrerbart.
- d) SANT: Eftersom chebyshevfiltrets amplitudkaraktäristik har rippel i passbandet, får det en brantare övergång mellan passbandet och spärrbandet, jämfört med butterworthfiltret – och därigenom en högre dämpning än butterworthfiltret i spärrbandet.
- e) FALSKT: Påståendet gäller *frekvensmodulerade* signaler.

2. $y(t) = (x * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau)h(\tau) d\tau$ (eller den andra faltningsintegralen: $(x * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau$),

där $x(t - \tau) = \begin{cases} t - \tau; & t - 1 < \tau \leq t + 1 \\ 0; & \text{f.ö.} \end{cases}$

och $h(\tau) = \begin{cases} 2; & 2 \leq \tau < 6 \\ 0; & \text{f.ö.} \end{cases}$



Från figuren erhålls tydligt att $\left. \begin{matrix} t+1 < 2 \Rightarrow t < 1 \\ t-1 > 6 \Rightarrow t > 7 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{y(t) = 0}}$

För $t-1 < 2 \leq t+1 \Rightarrow \underline{1 \leq t < 3} \Rightarrow \underline{\underline{y(t) = \int_2^{t+1} (t - \tau) \cdot 2 d\tau = [2t\tau - \tau^2]_2^{t+1} = t^2 - 4t + 3}}$

För $\left\{ \begin{matrix} t-1 \geq 2 \\ t+1 < 6 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \underline{3 \leq t < 5} \Rightarrow \underline{\underline{y(t) = \int_{t-1}^{t+1} (t - \tau) \cdot 2 d\tau = [2t\tau - \tau^2]_{t-1}^{t+1} = 0}}$

För $t-1 < 6 \leq t+1 \Rightarrow \underline{5 \leq t < 7} \Rightarrow \underline{\underline{y(t) = \int_{t-1}^6 (t - \tau) \cdot 2 d\tau = [2t\tau - \tau^2]_{t-1}^6 = -t^2 + 12t - 35}}$

3. Fouriertransformering av $x(t)$ ger (se Formler & Tabeller, Tab. 17:3) insignalens frekvensspektrum:

$$\underline{\underline{X(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega} - \frac{1}{2 + j\omega} = \frac{1}{(1 + j\omega)(2 + j\omega)}}}$$

Fouriertransformering av utsignalen $y(t)$ ger (F&T, Tab. 16:11 och 17:3) utsignalens frekvensspektrum:

$$\underline{\underline{Y(\omega) = j \frac{d}{d\omega} \left\{ \frac{1}{1 + j\omega} \right\} = j(-1) \cdot \frac{1}{(1 + j\omega)^2} \cdot \frac{d}{d\omega} \{1 + j\omega\} = \frac{1}{(1 + j\omega)^2}}}$$

Alternativt beräknas $Y(\omega)$ som $\underline{\underline{Y(\omega) = Y(s)|_{s=j\omega} = \frac{1}{(s+1)^2} = \frac{1}{(j\omega+1)^2}}}$.
Tab. 19:15
 $\Rightarrow Y(\omega)$ existerar!

Frekvensfunktionen för detta stabila LTI-system blir då $\underline{H(\omega)} = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{(1+j\omega)(2+j\omega)}{(1+j\omega)^2} = \underline{\underline{\frac{2+j\omega}{1+j\omega}}}$.

$$H(\omega) = \frac{1+j\omega+1}{1+j\omega} = 1 + \frac{1}{1+j\omega} \Rightarrow \underline{h(t)} = \text{/Tab. 17:10 \& 17:2/} = \underline{\underline{\delta(t) + e^{-t} \cdot u(t)}}.$$

Enligt ovan har vi $H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{2+j\omega}{1+j\omega} \Rightarrow (j\omega)Y(\omega) + Y(\omega) = (j\omega)X(\omega) + 2X(\omega)$

$$\text{F\&T, Tab. 16:10} \Rightarrow \underline{\underline{\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)}}$$

*Anm: Det går också bra att använda laplacetransformen ovan, för att beräkna $H(s)$!
Eftersom LTI-systemet är stabilt får vi därefter frekvensfunktionen från systemfunktionen som $H(\omega) = H(s)|_{s=j\omega}$.*

4.

a) Grafen ger att $x(t)$ har periodtid $T = 8$ sek, vilket innebär att dess grundvinkelfrekvens är

$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{4}$ rad/sek. De komplexa fourierseriekoefficienterna till $x(t)$ blir då

$$\begin{aligned} \underline{C_k} &= \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_1 t} dt = \int_2^8 \bullet = 0 \Big/ = \frac{1}{8} \int_0^2 3 \cdot e^{-jk\frac{\pi}{4}t} dt = \Big/ k \neq 0, \text{ ty division} \Big/ = \frac{3}{-jk\frac{\pi}{4} \cdot 8} \left[e^{-jk\frac{\pi}{4}t} \right]_0^2 \\ &= \frac{3}{-jk2\pi} \left(e^{-jk\frac{\pi}{4} \cdot 2} - e^0 \right) = \frac{3 \left(1 - e^{-jk\frac{\pi}{2}} \right)}{jk2\pi} = \underline{\underline{\frac{3 \left(1 - (-j)^k \right)}{jk2\pi}}} \end{aligned}$$

Anm: C_k kan utvecklas till antingen 0, $\frac{3(1+j)}{jk2\pi}$, $\frac{6}{jk2\pi}$ eller $\frac{3(1-j)}{jk2\pi}$, beroende på värdet på k .

Det är dock tillräckligt att ange det sammansatta uttrycket $C_k = \frac{3(1-(-j)^k)}{jk2\pi}$ som svar.

Division med k vid divisionen med inre derivatan ovan medför att uttrycket *inte* gäller för $k = 0$.

Medelvärdesnivån C_0 måste därför beräknas separat: $\underline{C_0} = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_1 t} dt \Big|_{k=0} = \frac{1}{8} \int_0^2 3 dt = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$.

$$\text{Svar: } \underline{\underline{C_k = \begin{cases} \frac{3(1-(-j)^k)}{jk2\pi}; & k \neq 0 \\ \frac{3}{4}; & k = 0 \end{cases}}}$$

b) Eftersom impulssvaret är (uppenbart) absolutintegrerbart, så är LTI-systemet stabilt och $H(\omega)$

existerar. För den periodiska insignalen $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \cdot e^{jk\omega_1 t}$ så erhålls därför den periodiska

utsignalen $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k \cdot e^{jk\omega_1 t}$ där $D_k = C_k \cdot H(k\omega_1)$.

$$\underline{H(\omega)} = \mathcal{F}(\delta(t) - 3e^{-3t}u(t)) = 1 - 3 \cdot \frac{1}{3 + j\omega} = \frac{j\omega}{3 + j\omega}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underline{|D_1|} = |C_1| \cdot |H(\omega_1)| = \left| \frac{3(1+j)}{j2\pi} \right| \cdot \left| \frac{j\pi}{12 + j\pi} \right| = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{12^2 + \pi^2}} = \frac{3}{\sqrt{288 + 2\pi^2}} \\ \underline{|D_2|} = |C_2| \cdot |H(2\omega_1)| = \left| \frac{3 \cdot 2}{j4\pi} \right| \cdot \left| \frac{j\pi}{6 + j\pi} \right| = \frac{3}{2\sqrt{6^2 + \pi^2}} = \frac{3}{\sqrt{144 + 4\pi^2}} \end{cases}$$

5. Kausala system medför att varje systemfunktions konvergensområde är den del av s -planet som är till höger om den av systemfunktionens poler som är längst till höger, dvs. konv. omr. av typen $\text{Re}\{s\} > \sigma_0$.

H_A : Laplacetransformera diff.ekvationen

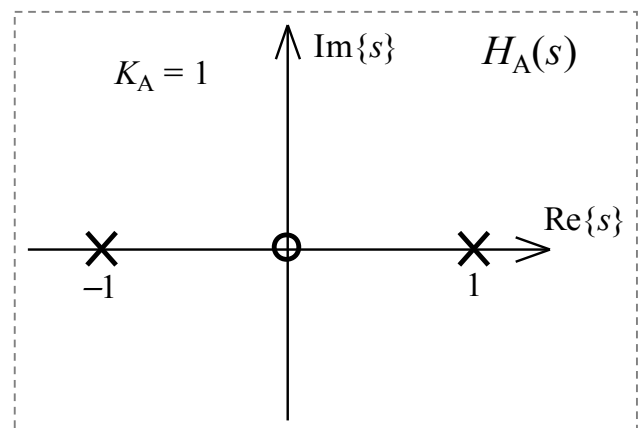
$$\Rightarrow (s^2 - 1)Y(s) = s \cdot X(s)$$

$$\Rightarrow \underline{H_A(s)} = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s}{s^2 - 1} = \frac{s}{(s+1)(s-1)}$$

\Rightarrow konvergensområde $\text{Re}\{s\} > 1$

\Rightarrow imaginära axeln ligger *inte* i konvergensområdet

\Rightarrow Systemet är **instabilt**.



H_B : Laplacetransformera diff.ekvationen

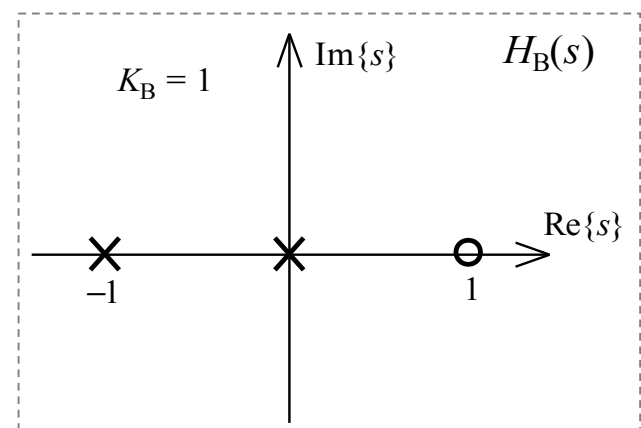
$$\Rightarrow (s^2 + s)Y(s) = (s-1) \cdot X(s)$$

$$\Rightarrow \underline{H_B(s)} = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s-1}{s(s+1)}$$

\Rightarrow konvergensområde $\text{Re}\{s\} > 0$

\Rightarrow imaginära axeln utgör en *rand* till konvergensområdet samt *enkelpoler på imaginära axeln*

\Rightarrow Systemet är **marginellt stabilt**.



H_C : Laplacetransformera diff.ekvationen

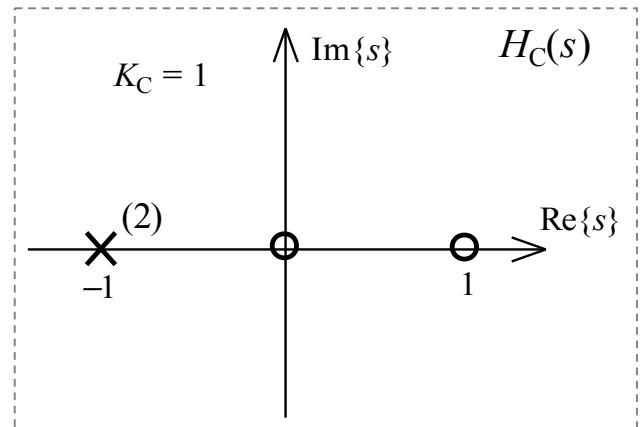
$$\Rightarrow (s^2 + 2s + 1)Y(s) = (s^2 - s) \cdot X(s)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{H_C(s)}} = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s(s-1)}{(s+1)^2}$$

\Rightarrow konvergensområde $\text{Re}\{s\} > -1$

\Rightarrow imaginära axeln ligger i konvergensområdet

\Rightarrow Systemet är **stabil**.



Vilket av dessa filter är ett HP-filter?

H_A kan inte vara ett HP-filter, eftersom systemet är instabilt.

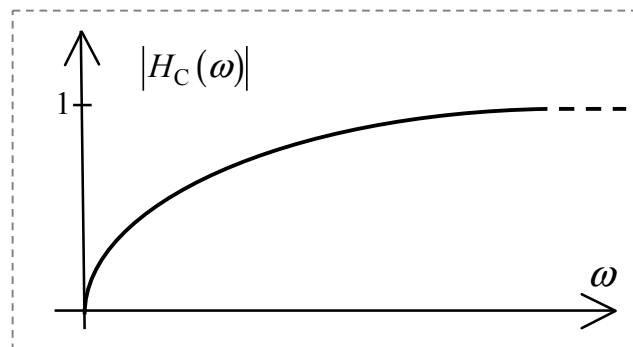
Inte heller H_B kan vara ett HP-filter, eftersom dess systemfunktion har en pol på $j\omega$ -axeln.

Systemfunktionen till ett HP-filter har lika många poler som nollställen (vilket medför att $\lim_{\omega \rightarrow \infty} |H(\omega)| = \text{nivåkonstanten}$). Eftersom detta gäller för $H_C(s)$, så kan ev. H_C vara ett HP-filter.

H_C är stabilt

$$\Rightarrow H_C(\omega) = H_C(s)|_{s=j\omega} = \frac{j\omega(j\omega-1)}{(j\omega+1)^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |H_C(0)| = 0 \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} |H_C(\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left| \frac{\left(1 - \frac{1}{j\omega}\right)}{\left(1 + \frac{1}{j\omega}\right)^2} \right| = 1 \end{cases}$$



\Rightarrow System H_C är ett högpasfilter!