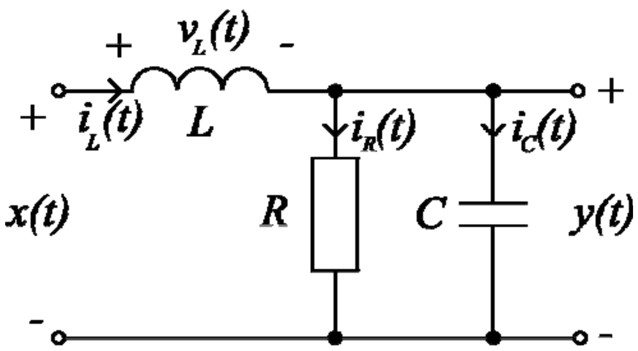
1.

Deluppgift	Svar (sant = S, falskt = F)	Förslag till motivering (**ska inte finnas med i tentamen!**)
a)	S	Parallellkoppling av kapacitanserna C_1 och C_2 motsvaras av $C_1 + C_2$
b)	F	Vid låga frekvenser har induktansen en liten impedans, dvs. spänningsfallet över den är litet och $y(t) \approx x(t)$. Vid höga frekvenser är dess impedans istället stor och större delen av insignalen $x(t)$ kommer att ligga över den, och endast en liten spänning $(= y(t))$ligger över resistansen. Sammanfattningsvis kommer filtret att karakteriseras som ett lågpassfilter, dvs. det släpper igenom lågfrekventa signaler och dämpar högfrekventa signaler.
c)	S	Om systemets insignal är $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ kommer utsignalen att vara $y(t) = A'\cos(\omega t + \varphi')$ där $A' = A\lvert H(\omega)\rvert$ (amplitudskalning) och $\varphi' = \varphi + \arg\left(H(\omega)\right)$ (fasförskjutning)
d)	S	Strömmen genom induktansen beror av spänningen över induktansen som ett LTI-system. Enligt föregående uppgift beror då strömmes amplitud (A') på spänningens amplitud (A) och på ω (genom faktorn $\lvert H(\omega)\rvert$)
e)	F	Signalen innehåller två komponenter, den ena med frekvensen 1 Hz och den andra med frekvensen 3 Hz. Eftersom den senare har en frekvens som är en heltalmultipel av den första (faktor 3) så kan vi säga att den första komponenten är grundtonen. Den *första* övertonen har då frekvens 2Hz och den *andra* har frekvensen 3Hz.

2.

a) Vi inför hjälpspänningar och hjälpströmmar i kretsen:



och får följande samband mellan ström och spänning för de tre komponenterna:

$v_L(t) = L\frac{d}{dt}i_L(t)$ (I), $y(t) = R \cdot i_R(t)$ (II), $i_C(t) = C\frac{d}{dt}y(t)$ (III)

Vidare ger Krichhoffs spänningslag och strömlag:

$x(t) = v_L(t) + y(t)$ (IV), $i_L(t) = i_R(t) + i_C(t)$ (V)

För att få en rent samband mellan $x(t)$ och $y(t)$ kan vi, exempelvis sätta in ekv. (I) i ekv. (IV):

$x(t) = L\frac{d}{dt}i_L(t) + y(t)$ (VI)

och sedan sätta in ekv. (V) i ekv. (VI):

$$x(t) = L\frac{d}{dt}\big(i_R(t) + i_C(t)\big) + y(t) = L\frac{d}{dt}i_R(t) + L\frac{d}{dt}i_C(t) + y(t) \quad \text{(VII)}$$

Slutligen sätts ekv. (II) och (III) in i ekv. (VII):

$$x(t) = L\frac{d}{dt}\frac{y(t)}{R} + L\frac{d}{dt}\left(C\frac{d}{dt}y(t)\right) + y(t) = \frac{L}{R}\frac{d}{dt}y(t) + LC\frac{d^2}{dt^2}y(t) + y(t)$$

Återstår att "snygga till" lite och sätta in numeriska värden på komponenterna:

$$\boxed{\frac{d^2}{dt^2}y(t) + \frac{d}{dt}y(t) + 10^5 \cdot y(t) = 10^5 \cdot x(t)}$$

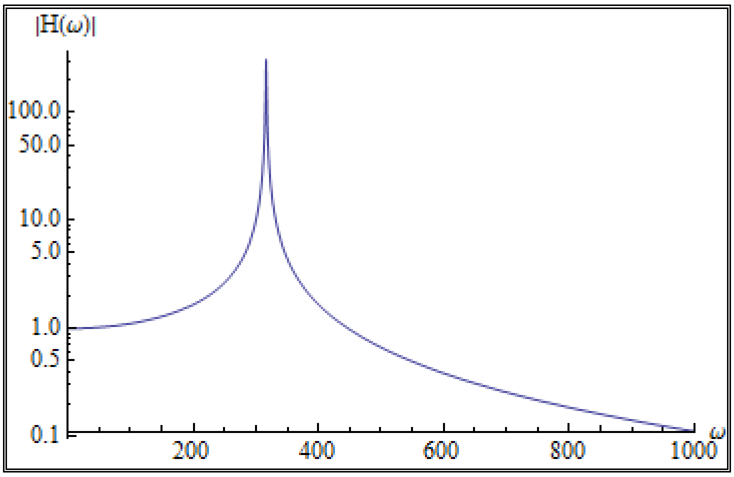
b) För att enklast bestämma $H(\omega)$ byter vi tidsderivatorna i den systembeskrivande differentialekvationen mot $j\omega$ och in- och utsignalerna mot de komplexa signalerna X och Y:

$$-\omega^2 Y + 10 \cdot j\omega \cdot Y + 10^5 \cdot Y = 10^5 \cdot X \quad \Rightarrow \quad H(\omega) = \frac{Y}{X} = \frac{10^5}{-\omega^2 + j\omega + 10^5}$$

Vi bestämmer $H(\omega)$ för $\omega = 0$, $\omega \to \infty$, och $\omega = \omega_0$ där ω_0 är den vinkelfrekvens då realdelen av nämnaren av $H(\omega)$ blir =0, dvs. $\omega_0 = \sqrt{10^5} \approx 316$ rad/s.

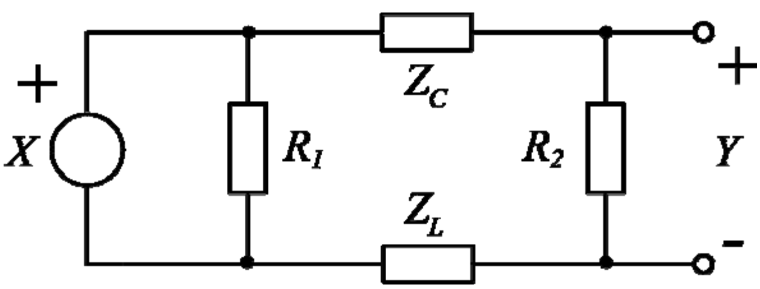
$$H(0) = 1,\; H(\omega \to \infty) \to 0,\; H(\omega_0) \approx \frac{10^5}{316 \cdot j} \approx -316j$$

Systemets amplitudkarakteristik är magnituden $|H(\omega)|$ och vi får då följande kurva, som är ritad med logaritmisk skala längs med $|H(\omega)|$-axeln för tydlighets skull.



3.

a) Det ekvivalenta komplexa kretsschemat visas nedan



$$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$
$$Z_L = j\omega L$$

b) Utsignalen Y fås, till exampel, genom spänningsdelning av inspänningen Y över resistansen R_2 tillsammans med Z_L och Z_L (OBS: resistansen R_1 ingår inte i detta uttryck!):

$$Y = X \cdot \frac{R_2}{R_2 + Z_L + Z_C}$$

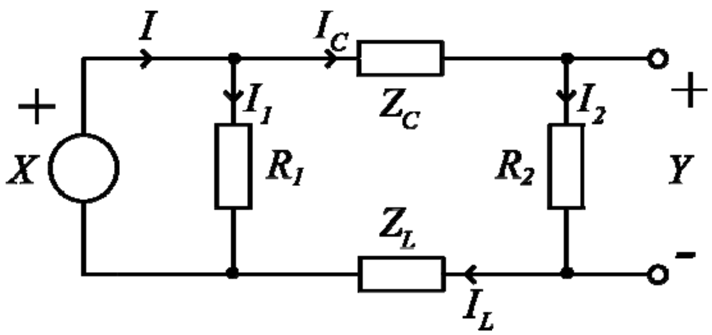
och ger systemets frekvensfunktion

$$H(\omega) = \frac{Y}{X} = \frac{R_2}{R_2 + Z_L + Z_C} = \frac{R_2}{R_2 + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega R_2 C}{j\omega R_2 C - \omega^2 LC + 1}$$

Med komponentvärdena insatta blir frekvensfunktionen

$$\boxed{H(\omega) = \frac{j\omega \cdot 4,7 \cdot 10^{-4}}{j\omega \cdot 4,7 \cdot 10^{-4} - \omega^2 \cdot 4,7 \cdot 10^{-9} + 1}}$$

c) Med strömmarna införda i komplexschemat ser det ut så här (figur till vänster):



Kirchhoffs strömlag ger då att $I_C = I_2 = I_L$ och $I = I_1 + I_2$.

OBS: strömmarnas riktningar är i princip godtyckliga, men bestäms av polariteten för spänningarna över komponenterna. I denna fall har vi spänningen X över R_1 *och spänningen Y över* R_2*, vilket ger riktningarna på strömmarna* I_1 *och* I_2*. Eftersom det går samma ström (till storlek) genom* Z_C *och* Z_L *som genom* R_2 *är det naturligt att också ange samma riktningar på dessa tre strömmar.*

Insignalen $x(t) = 2\cos(5t + 0,2)$ har vinkelfrekvens $\omega = 5$ rad/s, vilket ger numeriska värden på de olika impedanserna enligt följande:

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} \approx -4.26 j \cdot 10^4 \ \Omega, \quad Z_L = j\omega L = 5j \cdot 10^{-3} \ \Omega$$

För att beräkna strömmarna kan vi, till exampel, börja med att bestämma strömmen $I_1 = X / R_1$. Eftersom impedansen R_1 är reell ges strömmen som funktion av tiden genom R_1 som

$$i_1(t) = x(t) / R_1 = 0,02\cos(5t + 0,2) \text{ A.}$$

På samma sätt ges strömmen I_2 av $I_2 = X / Z$ där $Z = Z_C + R_2 + Z_L \approx 100 - 4.26 j \cdot 10^4$ Ω.

Det ger $I_2 = X / Z \approx 2.35 j \cdot 10^{-5} X$. Det betyder att strömmen $i_2(t)$ ges av spänningen $x(t)$ genom en amplitudskalning med faktorn $2.35 \cdot 10^{-5}$ och en fasförskjutning med

$1,57 \approx \arg\left(2.35j\cdot 10^{-5}\right)$:

$\boxed{i_2(t) = 4,7\cdot 10^{-5}\cos(5t+1,77)\ \text{A}}$.

Detta blir även strömmen genom kapacitansen och genom induktansen:

$\boxed{i_2(t) = i_C(t) = i_L(t)}$. Slutligen, strömmen $i(t)$ ut från spänningskällan blir

$$\boxed{i(t) = i_1(t)+i_2(t) \approx 0,02\cos(5t+0,2)+4,7\cdot 10^{-5}\cos(5t+1,77) \approx 0,02\cos(5t+0,2)\ \text{A}}.$$

En alternativ metod är att först beräkna strömmen I genom att slå samman alla impedanserna, motsvarand en parallellkoppling av R_1 med $Z_C+R_2+Z_L$. Därefter kan I_2 och I_2 beräknas genom strömdelning. Det leder till samma resultat, men blir lite mer att räkna.

4.

a) Signalen $x(t)$ har periodtiden $T_0 = 2$ sek och därmed grundvinkelfrekvensen $\omega_0 = 2\pi/T_0 = \pi$ rad/s. Dess fourierseridkoefficienter beräknas enligt

$$c_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j\omega_0 kt}dt = \frac{1}{2}\int_0^2 \left|\sin(\pi t/2)\right| e^{-j\pi kt}dt = \{\text{Integranden är positiv i intervallet}\} =$$

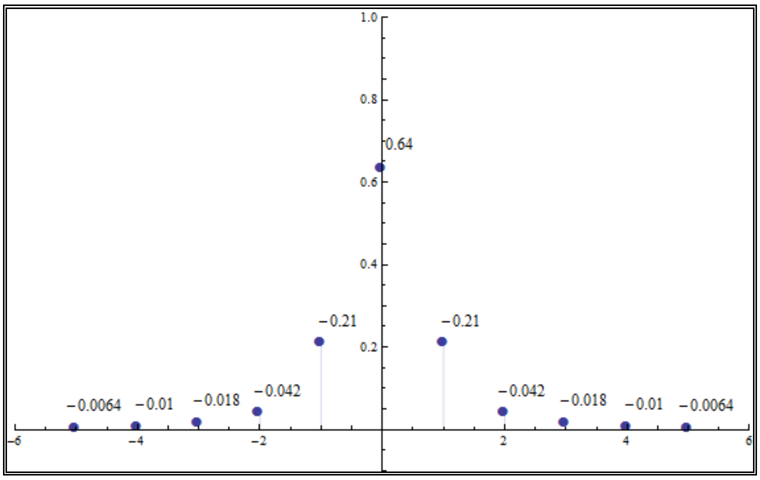
$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \sin(\pi t/2)e^{-j\pi kt}dt = \{\text{Euler}\} = \frac{1}{2}\int_0^2\left(\frac{e^{j\pi t/2}-e^{-j\pi t/2}}{2j}\right)e^{-j\pi kt}dt = \frac{1}{4j}\int_0^2\left(e^{j\pi\left(-k+\frac{1}{2}\right)t} - e^{j\pi\left(-k-\frac{1}{2}\right)t}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{4j}\left[\frac{e^{j\pi\left(-k+\frac{1}{2}\right)t}}{j\pi\left(-k+\frac{1}{2}\right)} - \frac{e^{j\pi\left(-k-\frac{1}{2}\right)t}}{j\pi\left(-k-\frac{1}{2}\right)}\right]_0^2 = \frac{1}{4j}\left(\frac{e^{j2\pi\left(-k+\frac{1}{2}\right)}-1}{j\pi\left(-k+\frac{1}{2}\right)} - \frac{e^{j2\pi\left(-k-\frac{1}{2}\right)}-1}{j\pi\left(-k-\frac{1}{2}\right)}\right) = \{k \text{ är ett heltal}\} =$$

$$= \frac{1}{4j}\left(\frac{e^{j\pi}-1}{j\pi\left(-k+\frac{1}{2}\right)} - \frac{e^{-j\pi}-1}{j\pi\left(-k-\frac{1}{2}\right)}\right) = \frac{1}{4j}\left(\frac{-2}{j\pi\left(-k+\frac{1}{2}\right)} - \frac{-2}{j\pi\left(-k-\frac{1}{2}\right)}\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{\left(-k+\frac{1}{2}\right)} - \frac{1}{\left(-k-\frac{1}{2}\right)}\right) =$$

$$= \frac{-1}{2\pi\left(k^2-\frac{1}{4}\right)} = \frac{2}{\pi\left(1-4k^2\right)} \quad\Rightarrow\quad \boxed{c_k = \frac{2}{\pi\left(1-4k^2\right)}}$$

b) Motsvarande komplexa spektrum visas i figuren nedan



c) Utsignalens koefficienter ges av

$$d_k = c_k \cdot H(\omega_0 k) = c_k \cdot H(\pi k) = \frac{2}{\pi\left(1-4k^2\right)} \cdot \frac{10}{10 + j\pi k} = \frac{20}{\pi\left(1-4k^2\right)\left(10+j\pi k\right)}$$

5.

a) Vi ser att $x_3(t) = x_1(t) + x_2(t)$. Om systemet $\mathcal{H}$ är linjärt så ska det gälla att utsignalen för en insignal som är summan av två signalen, i detta fallet $x_3(t) = x_1(t) + x_2(t)$, bli summan av utsignalen för $x_1(t)$ och utsignalen för $x_1(t)$, dvs det ska gälla att $y_3(t) = y_1(t) + y_2(t)$. Det ser vi också att det gör!

b) Vi ser att $x_2(t) = x_1(t-1)$. Om systemet är tidsinvariant så ska det gälla att en tidförskjutning av en insignal motsvaras av samma tidsförskjutninig av desss utsignal, dvs utsignalen av $x_1(t-1)$ ska bli $y_1(t-1)$ där $y_1(t)$ är utsignalen av $x_1(t)$. Med andra ord ska gälla att $y_2(t) = y_1(t-1)$. För systemet $\mathcal{H}$ ser vi att det snarare är fallet att $y_2(t) = -y_1(t-1)$, dvs vi har hittat ett exempel på en signal som inte stöder tidsinvarians. Alltså kan sysemet $\mathcal{H}$ inte vara tidsinvariant.

c) Det räcker inte med att observera ett par exempel på signaler som stödjer påståendet om linjaritet. För att vara helt säker på att $\mathcal{H}$ är linjärt skulle observationen att

$$x_3(t) = x_1(t) + x_2(t) \quad \Rightarrow \quad y_3(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

behöva gälla för *alla* insignaler $x_1(t)$ och $x_2(t)$.