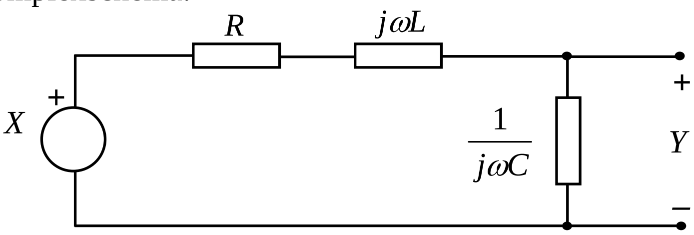
1.

Deluppgift	Svar	Förslag till motivering (**ska inte finnas med i tentamen!**)
a)	S	Den egenskap som beskrivs är definitionen av kausalt system.
b)	F	Den egenskap som beskriv måste gälla för ett linjärt system, inte nödvändigtvis för ett tidsinvariant system.
c)	S	De tre komponenterna i signalen har alla en frekvens som kan skrivas som en heltalsmultipel av en högsta vinkelfrekvensen $\omega = \pi / 2$, vilket motsvarar frekvensen 0,25 Hz.
d)	S	Med bara en reaktiv komponent blir det LP eller HP-filter.
e)	F	Strömmen från strömkällan delas upp och en del går genom induktansen och en del genom resistansen. Spänningen över resistansen är propotionell mot den senare strömmen. Men hur mycket ström som ”försvinner” genom induktansen beror på induktansen.

2. Komplexschema:



Spänningsdelning: $Y = X \cdot \dfrac{\dfrac{1}{j\omega C}}{\dfrac{1}{j\omega C} + R + j\omega L} = X \cdot \dfrac{1}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC} = X \cdot \dfrac{1}{1 - \omega^2 10^{-4} + j\omega 10^{-2}}$

Alternativt: Låt spänningskällan driva den komplexa strömmen

I genom kretsen $\left(\text{dvs. seriekopplingen av } R,\ j\omega L \text{ och } \dfrac{1}{j\omega C} \right)$ ger m.h.a. Ohms lag att

$I = \dfrac{X}{\dfrac{1}{j\omega C} + R + j\omega L}$. Då är $Y = \dfrac{1}{j\omega C} \cdot I = X \cdot \dfrac{\dfrac{1}{j\omega C}}{\dfrac{1}{j\omega C} + R + j\omega L} = \cdots$

Ger frekvensfunktionen $\underline{H(\omega) = \dfrac{Y}{X} = \dfrac{1}{1 - \omega^2 10^{-4} + j\omega 10^{-2}}}$

<u>Stationär cosinus</u> $x(t) = \cos(200t)$ rad/s, som insignal (spänning!) till detta <u>stabila system</u> (stabilt ty frekvensfunktionen existerar!)

$$\Rightarrow \quad y(t) = \left| H(200) \right| \cos\left(200t + \arg H(200) \right)$$

$$H(200) = \frac{1}{1 - 4 \cdot 10^4 \cdot 10^{-4} + j200 \cdot 10^{-2}} = \frac{1}{-3 + j2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{9+4}} e^{-j\left(\arctan\frac{2}{-3} + \pi \right)} = \left| H(200) \right| e^{j \arg H(200)}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{y(t) = \frac{1}{\sqrt{13}} \cos\left(200t + \arctan\frac{2}{3} - \pi \right)}$$

3.

a) Ur figuren erhålls den givna signalens periodtid $T_0 = 4$ sek, vilket innebår att signalens grundvinkelfrekvens är $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{\pi}{2}$ rad/sek. Vi ser att signalen kan uttryckas som $x(t) = t$ i intervallet $-2 < t < 2$ sek. Dess komplexa fourierseriekoefficienter blir därför

$$\underline{c_k} = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} t\cdot e^{-j\frac{k\pi}{2}t}dt = \Big/ \int f\cdot g = [f\cdot G] - \int f'\cdot G \Big/$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{t\cdot e^{-j\frac{k\pi}{2}t}}{-jk\frac{\pi}{2}}\right]_{-2}^{2} - \frac{1}{4}\int_{-2}^{2}\frac{e^{-j\frac{k\pi}{2}t}}{-jk\frac{\pi}{2}}dt = \frac{1}{-jk2\pi}\left(2e^{-j\frac{k\pi}{2}2} + 2e^{j\frac{k\pi}{2}2}\right) - \frac{1}{4}\left[\frac{e^{-j\frac{k\pi}{2}t}}{\left(-jk\frac{\pi}{2}\right)^2}\right]_{-2}^{2}$$

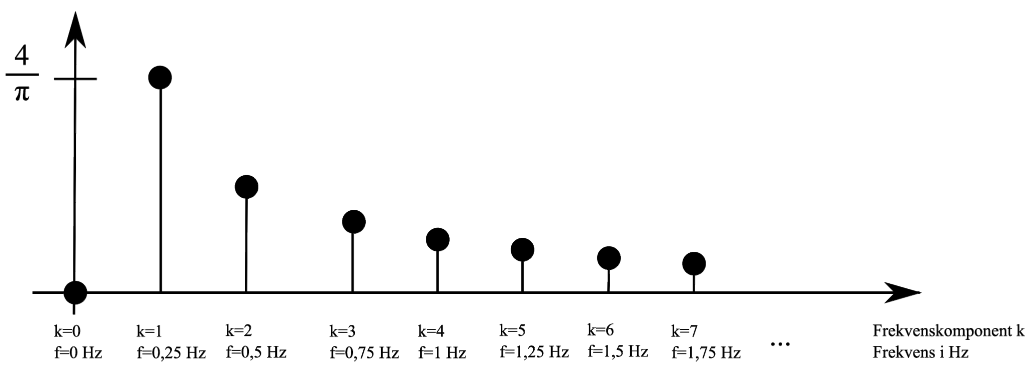
$$= \Big/ e^{\pm jk\pi} = \left(e^{\pm j\pi}\right)^k = (-1)^k \Big/ = \frac{2(-1)^k}{-jk\pi} + \frac{1}{k^2\pi^2}\Big(\underbrace{e^{-j\frac{k\pi}{2}2} - e^{j\frac{k\pi}{2}2}}_{=0}\Big) = \underline{\frac{j2(-1)^k}{k\pi} \qquad k \neq 0}$$

På grund av division med k i integrationens första steg ovan, så gäller inte uttrycket för c_k för $k = 0$, vilket innebär att c_0 måste beräknas separat:

$$\underline{c_0} = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} x(t)\,dt = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} t\,dt = \frac{1}{4}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-2}^{2} = \underline{0} \text{ (signalens medelvärde), dvs. } \underline{\underline{c_k = \begin{cases} \frac{j2(-1)^k}{k\pi}; & k \neq 0 \\ 0; & k = 0 \end{cases}}}$$

b)

Amplitudkarakteristik: 2 |c_k|



c) Insignalens grundfrekvens är $f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{4}$ Hz, vilket innebär att de frekvenskomponenter (deltoner) som bygger upp signalen har frekvenserna $f_k = k\cdot f_0 = \frac{k}{4}$ Hz.

Det ideala bandpassfiltret släpper igenom alla frekvenskomponenter i sitt passband, dvs. i frekvensområdet $1{,}8 < f < 2{,}4$ Hz, vilket innebär att frekvenskomponenterna med frekvens $f_8 = 2$ Hz och $f_9 = 2{,}25$ Hz passerar filtret – dvs. deltonerna för $\underline{\underline{k = 8 \text{ och } 9}}$.

Anm: Ovan menas <u>fysikaliska sinussignaler</u> (som bara har positiva frekvenser).
Vid komplex fourierserierepresentation är det de <u>komplexvärda</u> frekvenskomponenterna för k = ±8 och ±9 som passerar filtret. Övriga komponenter filtreras bort.

4.

a) Stegsvaret bestäms som utsignalen då insignalen är $x(t) = u(t) =$ enhetssteget. I detta fall gäller alltså att stegsvaret blir $u(t) - u(t-2)$.

b) Utsignalen består av skillnaden mellan två termer: $x(t)$ respektive $x(t-2)$. Den första termen har motsvarande frekvensfunktion: $H_1(\omega) = 1$ och den andra termen har motsvarande frekvensfunktion $H_1(\omega) = e^{-2j\omega}$. Eftersom systemet är linjärt blir den totala frekvensfunktionen $H(\omega) = H_1(\omega) - H_2(\omega) = 1 - e^{-2j\omega}$.

c) I detta fall blir utsignalen

$$x(t) - x(t-2) = 7 + 3\cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) - 7 - 3\cos\left(2(t-2) + \frac{\pi}{2}\right) = -3\sin(2t) + 3\sin(2t-4)) =$$

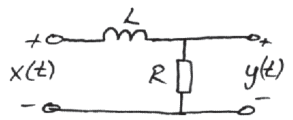
$$= -3\sin(2t) + 3\sin(2t-4)) = -3\sin(2t) + 3\sin(2t)\cos 4 - 3\cos(2t)\sin 4 =$$

$$= 2,27\cos(2t) - 4,96\sin(2t) = 5,45\big(0,42\cos(2t) - 0,91\sin(2t)\big) = 5,45\cos(2t + 1,14)$$

eller, ekvivalent: $5,45\cos(2t + 1,14) = 5,45\sin(2t + 2,71)$

5.

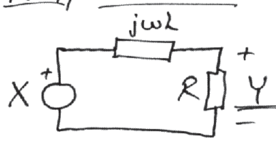
(5)



$R = 2\,\Omega$
$L = 0,5\,H$

a) Komplexschema:

spänningsdelning



$$Y = X \cdot \frac{R}{R + j\omega L} = X \cdot \frac{2}{2 + j\frac{1}{2}\omega} = X \cdot \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{4}}$$

$$H(\omega) = \frac{Y}{X} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{4}}$$

b) Amplitudkaraktäristiken: $|H(\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{16}}}$

$|H(0)| = 1$, $\lim_{\omega \to \infty} |H(\omega)| = 0$

$|H(\omega)|$ skissas enkelt som:

Sinussignaler med låga frekvenser dämpas lite och högfrekventa sinussignaler dämpas mycket

(För stabilt LTI-system gäller ju att, om $x(t) = \cos(\omega_2 t)$
$\Rightarrow y(t) = |H(\omega_2)| \cos(\omega_2 t + \arg H(\omega_2))$)

Följaktligen är detta ett lågpassfilter

c) $H(\omega) = \dfrac{1}{\frac{1}{4}(j\omega) + 1}$ $\Rightarrow$ /Direkt samband för koefficienterna i täljaren o nämnaren/

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$