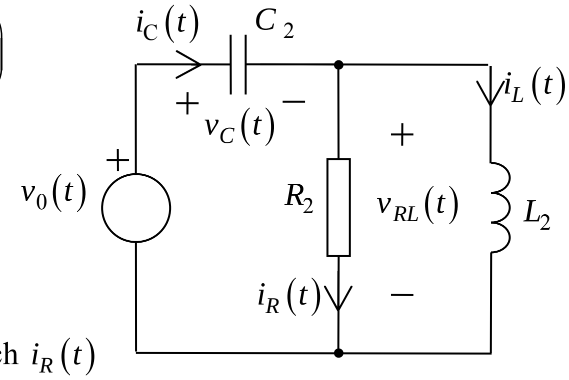
1.

Deluppgift:	a)	b)	c)	d)	e)
Sant (**S**) /Falskt (**F**):	**S**	**F**	**S**	**F**	**S**

2.

a) Förenkla gärna först parallellkopplingen $\left(R_2 = R//R = \frac{R}{2} \right)$ och de två seriekopplingarna $\left(\frac{1}{C_2} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C} \Rightarrow C_2 = \frac{C \cdot C}{C+C} = \frac{C}{2} \right.$ och $\left. L_2 = L + L = 2L \right)$. Då erhålls det förenklade elektriska



LTI-systemet till höger, där även hjälpströmmarna $i_C(t)$ och $i_R(t)$ samt hjälpspänningarna $v_C(t)$ och $v_{RL}(t)$ har införts (strömmarnas och spänningarnas riktningar bestäms så att varje ström går från högre till lägre potential för R_2, C_2 och L_2 (strömmen går in vid ”+”-sidan). Sätt sedan upp ström-spänningssamband för R_2, C_2 och L_2 samt Kirchhoffs spänningslag i en lämplig slinga (finns bara en lämplig här – den över spännningskällan, kapacitansen och resistansen//induktansen) och Kirchhoffs strömlag i en av de två noderna:

$$i_C(t) = C_2 \frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{C}{2} \cdot \frac{dv_C(t)}{dt} \quad (1) \qquad\qquad v_0(t) - v_C(t) - v_{RL}(t) = 0 \quad (4)$$

$$v_{RL}(t) = R_2 \cdot i_R(t) = \frac{R}{2} \cdot i_R(t) \quad (2) \qquad\qquad i_C(t) = i_R(t) + i_L(t) \quad (5)$$

$$v_{RL}(t) = L_2 \frac{di_L(t)}{dt} = 2L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} \quad (3)$$

Utgå nu från ett samband där utsignalen $i_L(t)$, dvs. samband (3) eller (5) ovan, finns med och eliminera alla signaler utom in- och utsignal:

$$(3) \Rightarrow \underline{2L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}} = v_{RL}(t) = /(2)/ = \frac{R}{2} i_R(t) = /(5)/ = \frac{R}{2}\left(i_C(t) - i_L(t)\right) = /(1)/$$

$$= \frac{R}{2} \cdot \frac{C}{2} \cdot \frac{dv_C(t)}{dt} - \frac{R}{2} i_L(t) = /(4)/ = \frac{RC}{4} \cdot \frac{d}{dt}\left(v_0(t) - v_{RL}(t)\right) - \frac{R}{2} i_L(t)$$

$$= /(3)/ = \underline{\frac{RC}{4} \cdot \frac{dv_0(t)}{dt} - \frac{RC}{4} \cdot \frac{d}{dt}\left(2L \frac{di_L(t)}{dt}\right) - \frac{R}{2} i_L(t)}$$

Efter omskrivning av detta samband erhålls den efterfrågade systembeskrivande (differential)ekvationen

$$\underline{\underline{2RCL \cdot \frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + 8L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} + 2R \cdot i_L(t) = RC \cdot \frac{dv_0(t)}{dt}}}$$

Slutligen sätts de numeriska värdena på komponenterna in (R=100, L=10^{-2}, C=10^{-6}):

$$\underline{\underline{2 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + 8 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{di_L(t)}{dt} + 200 \cdot i_L(t) = 10^{-4} \cdot \frac{dv_0(t)}{dt}}}$$

Anm. 1:Vi vet att systemets ordning (=2) är lika med antalet inverkande kapacitanser och induktanser,men notera att detta gäller den <u>förenklade</u> kretsen ovan och inte ursprungskretsen.

Anm. 2: Om man istället börjar med samband (5), så erhålls $i_L(t) = i_C(t) - i_R(t) = /(1)\,\&\,(2)/ =$

$$= \frac{C}{2} \cdot \frac{dv_C(t)}{dt} - \frac{2}{R} v_{RL}(t) = /(4)\,\&\,(3)/ \;\; = \frac{C}{2} \cdot \frac{d\left(v_0(t) - v_{RL}(t)\right)}{dt} - \frac{2}{R} \cdot 2L \frac{di_L(t)}{dt} = /(3)/ = \ldots$$

3.

a) Signalen $x(t)$ är periodisk med perioden $T = 4$ s. Dess fourierseriekoefficienter beräknas enligt

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad \text{där} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2} \quad \text{och}$$

där t_1 och t_2 är start och slut av ett godtyckligtintervall med längden T, dvs $t_2 - t_1 = T$. Här kan vi välja (exempelvis) $t_1 = -3$ och $t_2 = 1$. I detta intervall är $x(t) = 2 - t$ och FS-koefficienterna blir då

$$c_k = \frac{1}{4} \int_{-3}^{1} (2-t) e^{-jk\pi t/2} dt = \textit{bestäm primitiv funktion till integranden} = \frac{1}{4} \left[\frac{2(jk\pi(2-t) - 2)}{k^2 \pi^2} e^{-jk\pi t/2} \right]_{-3}^{1} =$$

$$= \frac{(2 - jk\pi)}{2k^2\pi^2} e^{-jk\pi/2} - \frac{(2 - 5jk\pi)}{2k^2\pi^2} e^{jk3\pi/2} = \frac{(2 - jk\pi)}{2k^2\pi^2} (-j)^k - \frac{(2 - 5jk\pi)}{2k^2\pi^2} (-j)^k = \frac{2}{k\pi} (-j)^{k+1}$$

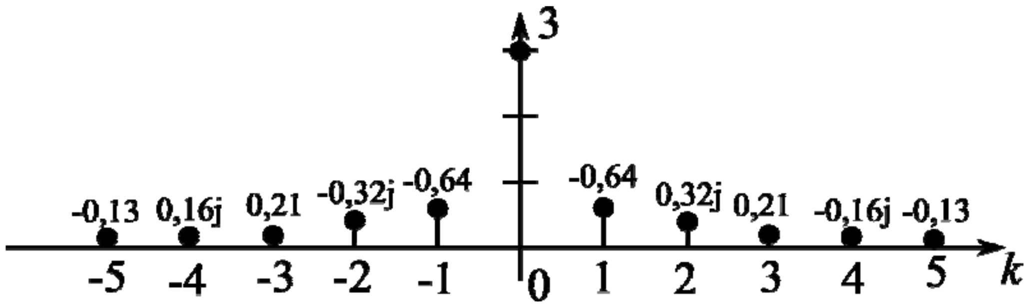
Detta uttryck för c_k fungerar så länge som $k \neq 0$, specialfallet $k = 0$ ges av

$$c_0 = \frac{1}{4} \int_{-3}^{1} (2-t) dt = \textit{bestäm primitiv funktion till integranden} = \frac{1}{4} \left[2t - \frac{t^2}{2} \right]_{-3}^{1} = \frac{1}{4} \left(2 - \frac{1}{2} + 6 + \frac{9}{2} \right) = 3$$

(c_0 ska vara lika med medelvärdet av $x(t)$ inom perioden, kontrollera att detta stämmer!)

b) Enligt ovan är periodtiden $T = 4$ s och grundvinkelfrekvensen $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$ rad/s. Det ger grundfrekvensen $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{4}$ Hz.

c)



4.

a) För den komplexa insignalen $\tilde{x}(t) = X \cdot e^{j\omega t}$, där $X \in R$ och $\omega \in R$, ansätts för differentialekvationen den *komplexvärda partikulärlösningen* $\tilde{y}_p(t) = Y \cdot e^{j\omega t}$, där $Y \in R$. Differentialekvationens *homogena lösning* $y_h(t)$ går, för ett stabilt LTI-system, alltid mot noll när tiden går mot oändligheten $\left(\lim_{t\to\infty} y_h(t) = 0\right)$. Vid insättning av $\tilde{x}(t)$ och $\tilde{y}_p(t)$ i differentialekvationen erhålls

$$3\frac{d^2\left(Y \cdot e^{j\omega t}\right)}{dt^2} + \frac{d\left(Y \cdot e^{j\omega t}\right)}{dt} + 2\left(Y \cdot e^{j\omega t}\right) = 4\frac{d\left(X \cdot e^{j\omega t}\right)}{dt} + 2\left(X \cdot e^{j\omega t}\right) \quad \Rightarrow$$

$$3Y \cdot (j\omega)^2 e^{j\omega t} + Y \cdot (j\omega) e^{j\omega t} + 2Y e^{j\omega t} = 4X \cdot (j\omega) e^{j\omega t} + 2X e^{j\omega t} \quad \Rightarrow$$

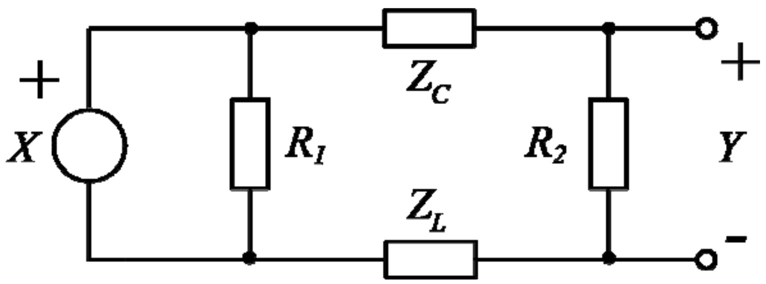
$$Y\left(-3\omega^2 + j\omega + 2\right) = X \cdot \left(j4\omega + 2\right)$$

Frekvensfunktionens värde vid vinkelfrekvensen ω definieras som kvoten mellan utsignalens komplexa amplitud och insignalens komplexa amplitud, dvs. $H(\omega) = \frac{Y}{X} = \frac{2 + j4\omega}{-3\omega^2 + j\omega + 2}$.

b) Det amplitudspektrum som anges i en lösning måste inte ritas exakt, men ska kunna visa att $H(0) = \frac{2}{2} = 1$ och $H(\infty) = 0$. Vidare ska konstateras att nämnarens realdel är =0 då $-3\omega^2 + 2 = 0$, dvs. $\omega = \sqrt{2/3} \approx 0{,}82$. Då blir $H(0{,}82) = \frac{2 + j4 \cdot 0{,}82}{j \cdot 0{,}82} = 4 - j \cdot 2{,}45$. Det ger $D(0{,}82) = |4 - j \cdot 2{,}45| = 4{,}69$. Amplitudkarakteristiken har alltså ett max kring $\omega \approx 0{,}82$ på 4,69.

5.

a) Det ekvivalenta komplexa kretsschemat visas nedan



$$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$
$$Z_L = j\omega L$$

b) Utsignalen Y fås, till exampel, genom spänningsdelning av inspänningen Y över resistansen R_2 tillsammans med Z_L och Z_L (OBS: resistansen R_1 ingår inte i detta uttryck!):

$$Y = X \cdot \frac{R_2}{R_2 + Z_L + Z_C}$$

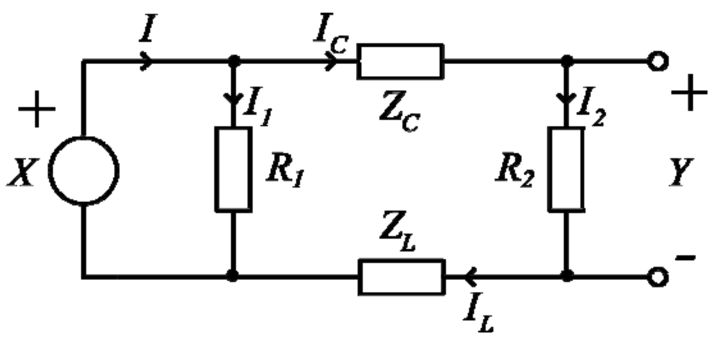
och ger systemets frekvensfunktion

$$H(\omega) = \frac{Y}{X} = \frac{R_2}{R_2 + Z_L + Z_C} = \frac{R_2}{R_2 + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega R_2 C}{j\omega R_2 C - \omega^2 LC + 1}$$

Med komponentvärdena insatta blir frekvensfunktionen

$$\boxed{H(\omega) = \frac{j\omega \cdot 4{,}7 \cdot 10^{-4}}{j\omega \cdot 4{,}7 \cdot 10^{-4} - \omega^2 \cdot 4{,}7 \cdot 10^{-9} + 1}}$$

c) Med strömmarna införda i komplexschemat ser det ut så här (figur till vänster):



Kirchhoffs strömlag ger då att $I_C = I_2 = I_L$ och $I = I_1 + I_2$.

OBS: strömmarnas riktningar är i princip godtyckliga, men bestäms av polariteten för spänningarna över komponenterna. I denna fall har vi spänningen X över R_1 *och spänningen Y över* R_2*, vilket ger riktningarna på strömmarna* I_1 *och* I_2*. Eftersom det går samma ström (till storlek) genom* Z_C *och* Z_L *som genom* R_2 *är det naturligt att också ange samma riktningar på dessa tre strömmar.*

Insignalen $x(t) = 2\cos(5t + 0,2)$ har vinkelfrekvens $\omega = 5$ rad/s, vilket ger numeriska värden på de olika impedanserna enligt följande:

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} \approx -4.26j \cdot 10^4 \ \Omega, \quad Z_L = j\omega L = 5j \cdot 10^{-3} \ \Omega$$

För att beräkna strömmarna kan vi, till exampel, börja med att bestämma strömmen $I_1 = X / R_1$. Eftersom impedansen R_1 är reell ges strömmen som funktion av tiden genom R_1 som $i_1(t) = x(t)/R_1 = 0,02\cos(5t + 0,2)$ A.

På samma sätt ges strömmen I_2 av $I_2 = X / Z$ där $Z = Z_C + R_2 + Z_L \approx 100 - 4.26j \cdot 10^4$ Ω. Det ger $I_2 = X / Z \approx 2.35j \cdot 10^{-5} X$. Det betyder att strömmen $i_2(t)$ ges av spänningen $x(t)$ genom en amplitudskalning med faktorn $2.35 \cdot 10^{-5}$ och en fasförskjutning med $1,57 \approx \arg\left(2.35j \cdot 10^{-5}\right)$:

$$\boxed{i_2(t) = 4,7 \cdot 10^{-5}\cos(5t + 1,77) \ \text{A}}.$$

Detta blir även strömmen genom kapacitansen och genom induktansen:

$\boxed{i_2(t) = i_C(t) = i_L(t)}$. Slutligen, strömmen $i(t)$ ut från spänningskällan blir

$$\boxed{i(t) = i_1(t) + i_2(t) \approx 0,02\cos(5t + 0,2) + 4,7 \cdot 10^{-5}\cos(5t + 1,77) \approx 0,02\cos(5t + 0,2) \ \text{A}}.$$

En alternativ metod är att först beräkna strömmen I *genom att slå samman alla impedanserna , motsvarand en parallellkoppling av* R_1 *med* $Z_C + R_2 + Z_L$*. Därefter kan* I_2 *och* I_2 *beräknas genom strömdelning. Det leder till samma resultat, men blir lite mer att räkna.*