1.

Deluppgift:	a)	b)	c)	d)	e)
Sant (**S**) /Falskt (**F**):	**S**	**S**	**S**	**S**	**S**

2. Inför hjälpströmmar och hjälpspänningar i kretsen enligt figuren nedan (spänningarnas och strömmarnas riktningar bestäms så att varje ström går från högre till lägre potential för *R*, *C* och *L* (strömmen går in vid "+"-sidan). Sätt sedan upp ström-spänningssamband för *R*, *C* och *L* samt Kirchhoffs spänningslag i en lämplig slinga (t.ex. den streckade linjen i figuren) och Kirchhoffs strömlag i den övre högra noden:

$$i_1(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt} \qquad (1)$$

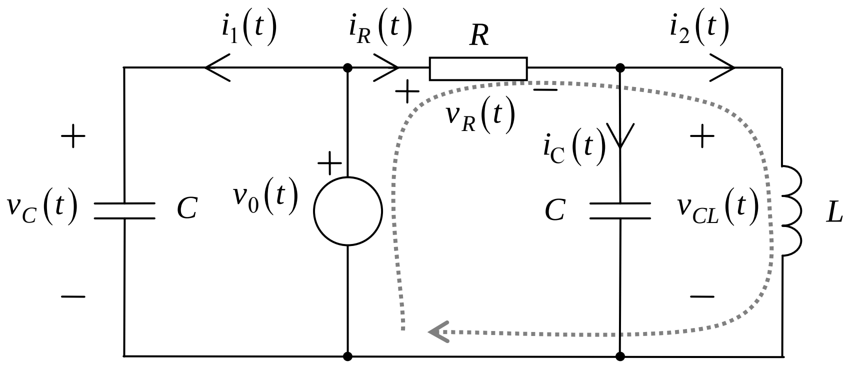
$$v_R(t) = R \cdot i_R(t) \qquad (2)$$

$$i_C(t) = C\frac{dv_{CL}(t)}{dt} \qquad (3)$$

$$v_{CL}(t) = L\frac{di_2(t)}{dt} \qquad (4)$$

$$v_0(t) - v_R(t) - v_{CL}(t) = 0 \qquad (5)$$

$$i_R(t) = i_2(t) + i_C(t) \qquad (6)$$



System 1: I det första systemet är $v_0(t)$ insignal och $i_1(t)$ utsignal i kretsen ovan.

Eftersom den vänstra kapacitansen är parallellkopplad med spänningskällan, så är $v_C(t) = v_0(t)$,

vilket i ekvation (1) ger att $\underline{\underline{i_1(t) = C\frac{dv_0(t)}{dt}}}$. Detta är den efterfrågade systembeskrivande ekvationen!

För ett system där förhållandet mellan insignal och utsignal kan beskrivas med en differentialekvation, så är systemets ordning lika med differentialekvationens ordning, dvs. den högsta derivatan av utsignalen (*se föreläsningsmaterialet, Kap. 6-7 samt kursboken, sid. 141, speciellt not 3*).

System 1 har därför systemet <u>ordning 0 (noll)</u> eftersom vi i vänsterledet bara har utsignalen, men ingen derivata av den.

Anm. 1: Man skulle också kunna säga att vi inte har någon differentialekvation alls, eftersom utsignalen ges direkt.

Anm. 2: Kombinationen [*R i serie med parallellkopplingen mellan C och L*] *är kopplad parallellt med spänningskällan och påverkar därför inte utsignalen* $i_1(t)$.

System 2: I det andra systemet är $v_0(t)$ insignal och $i_2(t)$ utsignal i kretsen ovan.

Utgå nu från ett samband där utsignalen finns med och eliminera alla signaler utom in- och utsignal:

$$(6) \;\Rightarrow\; \underline{i_2(t)} = i_R(t) - i_C(t) = /(2)\ \&\ (3)/ = \frac{1}{R}v_R(t) - C\frac{dv_{CL}(t)}{dt} = /(5)\ \&\ (4)/$$

$$= \frac{1}{R}\big(v_0(t) - v_{CL}(t)\big) - CL\frac{d^2 i_2(t)}{dt^2} = /(2)/ = \underline{\frac{1}{R}v_0(t) - \frac{1}{R}L\frac{di_2(t)}{dt} - CL\frac{d^2 i_2(t)}{dt^2}}.$$

Efter omskrivning av detta samband erhålls den systembeskrivande (differential)ekvationen

$$\underline{\underline{RCL\frac{d^2 i_2(t)}{dt^2} + L\frac{di_2(t)}{dt} + Ri_2(t) = v_0(t).}}$$

Systemets ordning är samma som differentialekvationens ordning, dvs. <u>ordning 2</u>.

Anm. 1: Systemets ordning är här samma som antalet kapacitanser och induktanser som påverkar utsignalen, dvs. de två som är parallellkopplade till höger i nätet. Kapacitansen till vänster i nätet är parallellkopplad med spänningskällan och påverkar därför inte $i_2(t)$.

…forts. nästa sida!

Anm. 2: Man kan alternativt börja med något annat samband som innehåller utsignalen – exempelvis:

$$(4) \Rightarrow \underline{L\frac{di_2(t)}{dt}} = v_{CL}(t) = /(5)/ = v_0(t) - v_R(t) = /(2)/ = v_0(t) - Ri_R(t) = /(6)/$$

$$= v_0(t) - R\left(i_2(t) + i_C(t)\right) = /(3)/ = v_0(t) - Ri_2(t) - RC\frac{dv_{CL}(t)}{dt} = /(4)/$$

$$= \underline{v_0(t) - Ri_2(t) - RCL\frac{d^2 i_2(t)}{dt^2}},$$

dvs. vi får samma differentialekvation som på föregående sida.

3. $|c_k|$ och $\arg c_k$ erhålls direkt från c_k (här är grundvinkelfrekvensen $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{5}$ rad/s):

$$\underline{c_k} = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{5}\int_0^5 e^{0.4t}e^{-jk\frac{2\pi}{5}t}\,dt = \frac{1}{5}\int_0^5 e^{0.4(1-jk\pi)t}\,dt = \frac{1}{5}\left[\frac{e^{0.4(1-jk\pi)t}}{0.4(1-jk\pi)}\right]_0^5$$

$$= \frac{e^{0.4(1-jk\pi)\cdot 5} - e^0}{2(1-jk\pi)} = \Big/ e^{-jk\pi\cdot 0.4\cdot 5} = e^{-jk2\pi} = \left(e^{-j2\pi}\right)^k = 1^k = 1 \Big/ = \underline{\frac{e^2-1}{2(1-jk\pi)}},$$

vilket ger att amplitudspektrumet är $\underline{\underline{|c_k| = \left|\frac{e^2-1}{2(1-jk\pi)}\right| = \frac{e^2-1}{2\sqrt{1+(k\pi)^2}}}}$ och

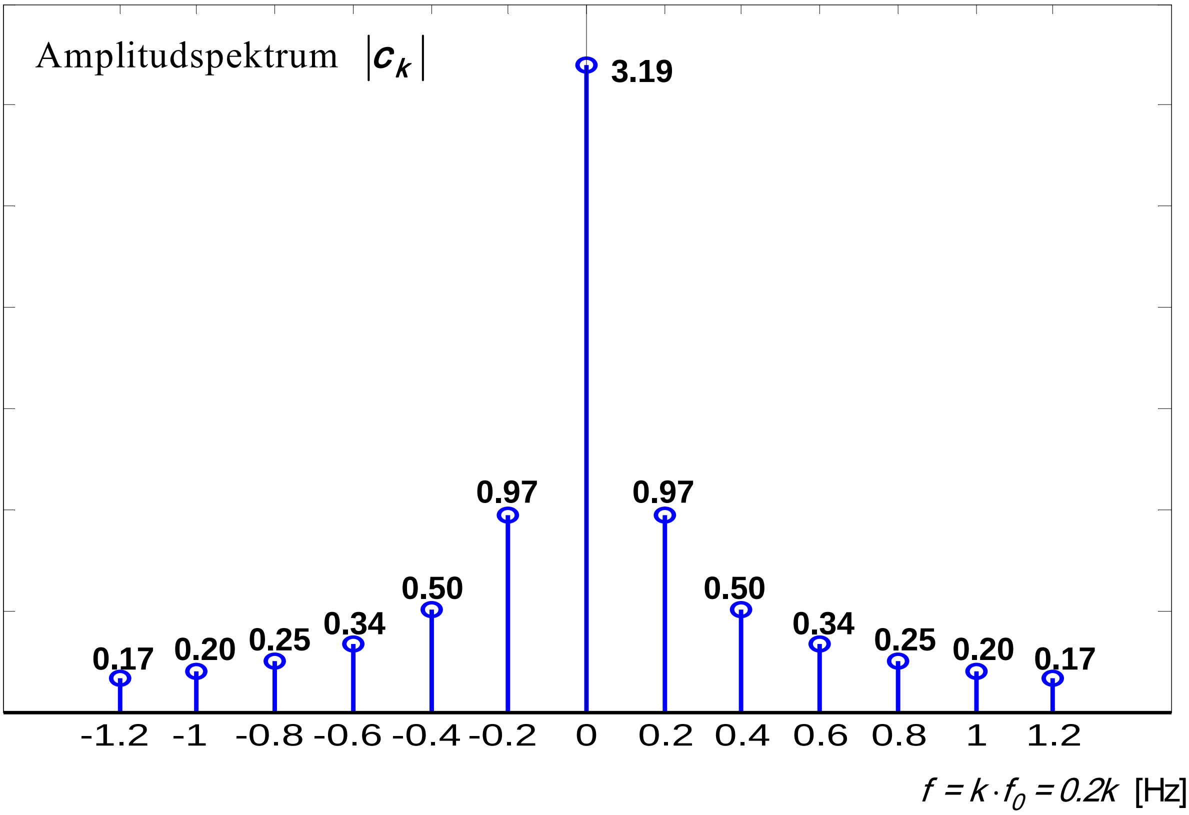
fasspektrumet är $\underline{\underline{\arg c_k}} = \arg\left(e^2-1\right) - \arg\left(2(1-jk\pi)\right) = 0 - \arctan\left(\frac{-k\pi}{1}\right) = \underline{\underline{\arctan(k\pi)}}$.

Detta ger följande värden på $|c_k|$ för $-6 \le k \le 6$ (notera att eftersom $x(t)$ är reellvärd så gäller $c_{-k} = c_k^*$, dvs. vi har $|c_{-k}| = |c_k|$):

$\lvert c_k\rvert = \frac{e^2-1}{2\sqrt{1+(k\pi)^2}}$	≈ 3.19	≈ 0.97	≈ 0.50	≈ 0.34	≈ 0.25	≈ 0.20	≈ 0.17

En graf föreställande signalens dubbelsidiga amplitudspektrum som funktion av frekvensen f för $-6 \le k \le 6$ efterfrågas. Överst på nästa sida visas denna graf.

Varje amplitudspektrumkomponent $|c_k|$ relateras till motsvarande frekvens $k \cdot f_0 = k \cdot \frac{1}{T_0} = 0.2k$ Hz ($f_0 = \frac{1}{T_0} = 0.2$ Hz är signalens grundfrekvens), dvs. $|c_1|$ finns vid frekvensen $f_0 = 0.2$ Hz, $|c_2|$ finns vid frekvensen $2f_0 = 0.4$ Hz, osv.



4.

a) Frekvensfunktionen $H(\omega)$ kan erhållas direkt från differentialekvationen:

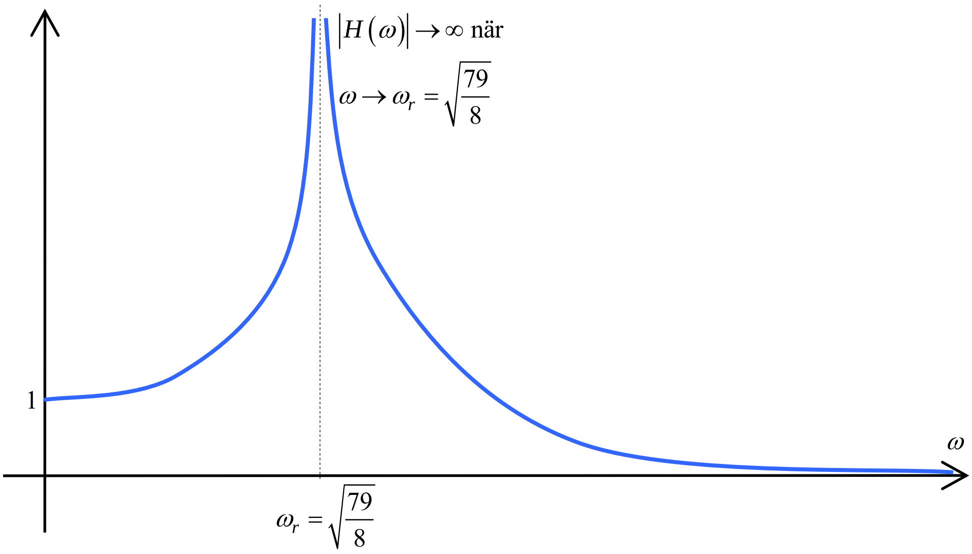
$$H(\omega) = \frac{k}{m(j\omega)^2 + k} = \frac{1}{1 - \frac{m}{k}\omega^2} = \frac{1}{1 - \frac{80}{790}\omega^2} \Rightarrow |H(\omega)| = \begin{cases} \dfrac{1}{1 - \frac{8}{79}\omega^2}; & |\omega| < \sqrt{\frac{79}{8}} \text{ rad/s} \\ \dfrac{1}{\frac{8}{79}\omega^2 - 1}; & |\omega| > \sqrt{\frac{79}{8}} \text{ rad/s} \end{cases}$$

b) Givet frekvensfunktionen kan vi bestämma ampltudkarakteristiken

$$|H(\omega)| = \begin{cases} \dfrac{1}{1 - \frac{8}{79}\omega^2}; & |\omega| < \sqrt{\frac{79}{8}} \text{ rad/s} \\ \dfrac{1}{\frac{8}{79}\omega^2 - 1}; & |\omega| > \sqrt{\frac{79}{8}} \text{ rad/s} \end{cases}$$

ur vilken man tydligt ser att $|H(0)| = 1$, $\lim_{\omega \to \infty} |H(\omega)| = 1$ och $|H(\omega)| \to \infty$ då $\omega \to \pm\sqrt{\frac{79}{8}}$ rad/s.

Rita amplitudkaraktäristik (principutseende räcker, men exakta värden där de enkelt/tydligt kan beräknas). Det räcker att rita för $\omega \geq 0$, eftersom $|H(-\omega)| = |H(\omega)|$:



c) Amplitudkaraktäristiken anger hur mycket LTI-systemet kommer att amplitudskala en sinusformad insignal med vinkelfrekvens ω rad/s. Vid vinkelfrekvensen $\omega_r = \sqrt{\frac{79}{8}}$ är amplitudkaraktäristiken oändligt stor – där inträffar ***resonans***. Om kranen börjar svänga med den vinkelfrekvensen, dvs. med periodtiden $\underline{\underline{T}} = \frac{2\pi}{\omega_r} = 2\pi\sqrt{\frac{8}{79}} \underline{\underline{\approx 2 \text{ sek}}}$, så kommer examinatorn svänging att ske med allt högre amplitud tills examinatorn slår i krantoppen eller marken. För rimligt begränsade svängnings-amplituder bör man hålla sig till vinkelfrekvenseren en bit från ω_r (periodtider en bit från $T = 2$ s).

5.

a) Frekvensfunktionen $H(\omega)$ beräknas enklast med hjälp av komplexa impedanser. Rita först ett ekvivalent komplexschema (se figuren till höger, där även den komplexa hjälpströmmen I_{LC} har införts).

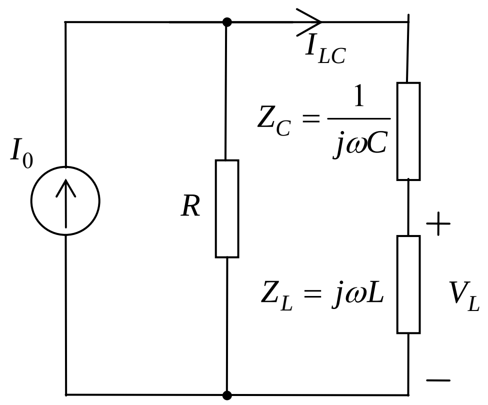
Ohms lag ger $V_L = Z_L \cdot I_{LC}$, där I_{LC} erhålls från strömdelningssambandet $I_{LC} = I_0 \frac{R}{(Z_L + Z_C) + R}$.

Följaktligen gäller

$$V_L = Z_L \cdot I_0 \frac{R}{Z_L + Z_C + R} = I_0 \frac{j\omega RL}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C} + R}$$

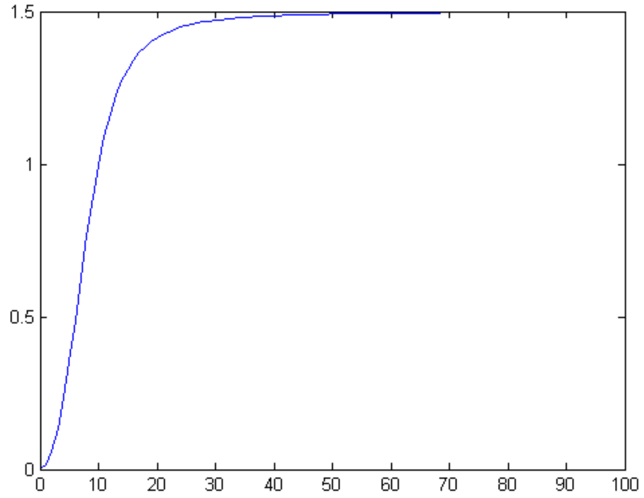
$$= I_0 \frac{R(j\omega)^2}{(j\omega)^2 + \frac{R}{L}\cdot j\omega + \frac{1}{LC}} \qquad \text{(I)}$$

Komplexschema



$$\underline{\underline{H(\omega)}} = \frac{\text{den komplexa utsignalen}}{\text{den komplexa insignalen}} = \frac{V_L}{I_0} = \ /\text{(I)}/ \ = \frac{R(j\omega)^2}{(j\omega)^2 + \frac{R}{L}\cdot j\omega + \frac{1}{LC}} = \underline{\underline{\frac{-1.5\omega^2}{100 - \omega^2 + j15\omega}}}$$

b) En plot av filtrets amplitudkarakteristik ser ut så här (ett högpassfilter)



Inget intressant händer vid resonansfrekvensen ω=10 rad/sek: H(10)=1.
Den systembeskrivande differentialekvationen erhålls genom att skriva om uttrycket för *H*(ω) så att både täljare och nämnare innehåller potenser av (*j* ω):

$$\underline{\underline{H(\omega)}} = \underline{\underline{\frac{-1.5\omega^2}{100-\omega^2+j15\omega}}} = \underline{\underline{\frac{1.5(j\omega)^2}{100+(j\omega)^2+15(j\omega)}}}$$

Sedan kan vi använda sambanden iformelbladet och komma fram till den systembeskrivande ekvationen:

$$\frac{d^2Y(t)}{dt^2}+15\frac{dY(t)}{dt}+100Y(t)=1.5\frac{d^2X(t)}{dt^2}$$