Uppgift 1

RÄTT SVAR	Kommentar
FALSKT	Att ett system är linjärt anger ett villkor på hur utsignalen beror av insignalen, inte på hur dess impulssvar ser ut.
SANT	Se kompendiet, avsnitt 3.1.2.
SANT	Se kompendiet, avsnitt 3.2.2.
SANT	Se kompletterande material om elektriska kretsar.

Uppgift 2
a) Fördel med stort b: lägre kvantiseringsbrus. Nackdel med stort b: fler bitar som måste sändas till mottagaren, kräver större bandbredd i överföringen.

b) Fördel med stort f_s: Mikrofonsignalen kan innehålla högre frekvenser som kan representeras av den samplade signalen, dvs. bättre ljudkvalitet. Nackdel med stor f_s: fler sampel per sekund som måste sändas till mottagaren, kräver större bandbredd i överföringen.

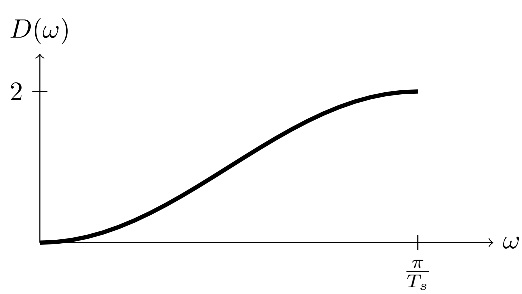
Uppgift 3 Systemets amplitudkarakteristik ges av

$$\begin{aligned} D(\omega) &= \left|H(\omega)\right| = \\ &= \left|0{,}5 - e^{-i\omega T_s} + 0{,}5\,e^{-2i\omega T_s}\right| = \left|e^{-i\omega T_s}\left(0{,}5\,e^{i\omega T_s} - 1 + 0{,}5\,e^{-i\omega T_s}\right)\right| \\ &= \left|0{,}5\,e^{i\omega T_s} - 1 + 0{,}5\,e^{-i\omega T_s}\right| = \left|\cos(\omega T_s) - 1\right|. \end{aligned}$$

I intervallet $0 \le \omega \le \frac{\pi}{T_s}$ får vi

$$D(\omega) = 1 - \cos(\omega T_s),$$

vilket plottas här, alltså ett högpassfilter (HP-filter).

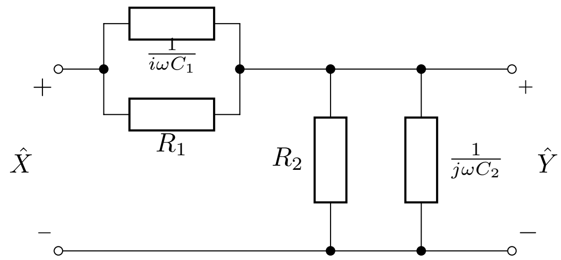


Uppgift 4 Samplingsfrekvensen $f_s = 500$ Hz motsvarar Nyquist-frekvensen $f_N = 250$ Hz eller $\omega_N = 2\pi f_N = 1{,}57$ krad/s. Alla frekvenser över Nyquist-frekvensen utsätts för vikning vid ideal sampling och rekonstruktion. Signalens första frekvenskomponent ligger under Nyquist-frekvensen, och bevaras därför intakt efter rekonstruktionen. Den andra komponenten i signalen har en frekvens ω ligger över Nyquist-frekvensen. Denna komponent viks ned till en frekvens $\omega' = \omega - n \cdot \omega_s$ så att $|\omega'| \le \omega_N$, där n är ett heltal. I detta fall, för $n = 2$, får vi $\omega' = \omega - 2 \cdot \omega_s = 4940 - 2 \cdot 2\pi \cdot 500 = -1{,}34$ krad/s. Efter ideal rekonstruktion får vi alltså signalen

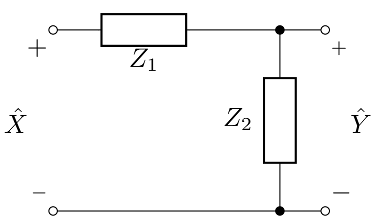
$$\begin{aligned} s_{\text{rek}}(t) &= 3{,}6\cos(1070\,t + 0{,}12) + 6{,}2\cos(-1340\,t - 0{,}35) = \\ &= 3{,}6\cos(1070\,t + 0{,}12) + 6{,}2\cos(1340\,t + 0{,}35) \end{aligned}$$

Uppgift 5

a. Det komplexa kretsschemat fås genom att ersätta varje komponent med motsvarande impedans och att ersätta de tidberoende in- och utsignalerna med motsvarande komplexa amplituder.



b. Kretsen utgör en spänningsdelare mellan två impedanser:



Spänningen $\hat{Y}$ ges därför av

$$\hat{Y} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \cdot \hat{X}$$

Båda impedanserna Z_1 och Z_2 utgör en parallellkoppling av en resistans och en kapacitans:

$$Z_k = \frac{R_k \cdot \frac{1}{j\omega C_k}}{R_k + \frac{1}{j\omega C_k}} = \frac{R_k}{j\omega R_k C_k + 1}$$

Systemets frekvensfunktion ges av

$$H(\omega) = \frac{\hat{Y}}{\hat{X}} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{\frac{R_2}{j\omega R_2 C_2 + 1}}{\frac{R_1}{j\omega R_1 C_1 + 1} + \frac{R_2}{j\omega R_2 C_2 + 1}} =$$
$$= \frac{R_2(j\omega R_1 C_1 + 1)}{R_1(j\omega R_2 C_2 + 1) + R_2(j\omega R_1 C_1 + 1)} = \frac{R_2 + j\omega R_1 R_2 C_1}{R_1 + R_2 + j\omega R_1 R_2 (C_1 + C_2)}$$

c. Vid $\omega = 0$ får vi

$$H(0) = \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

Detta är rimligt eftersom vid $\omega = 0$ motsvarar kapacitanserna oändligt höga impedanser (= avbrott). Kretsen utgör då en spänningsdelning mellan resistanserna R_1 och R_2, vilket är precis uttrycket för $H(0)$.

Uppgift 6

a. Det flera sätt att bestämma utsignalen $y(t)$ för ett LTI-system.

Alternativ 1: Utsignalen är faltning mellan insignalen och systemets impulssvar:

$$x(t) = \big(y * h\big)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = /x(\tau) = 0 \text{ när } \tau < 0 \text{ och } \tau > 1/ =$$
$$= \int_{0}^{1} h(t-\tau)\, d\tau.$$

Vi behöver undersöka tre olika fall:

$t < 0$: $x(t) = \int_0^1 0 \cdot d\tau = 0$

$0 \leq t < 1$: $x(t) = \int_0^t e^{-3(t-\tau)}\, d\tau = e^{-3t} \int_0^t e^{3\tau}\, d\tau = e^{-3t} \frac{e^{3t}-1}{3} = \frac{1-e^{-3t}}{3}$

$1 \leq t$: $x(t) = \int_0^1 e^{-3(t-\tau)}\, d\tau = e^{-3t} \int_0^1 e^{3\tau}\, d\tau = e^{-3t} \cdot \frac{e^3-1}{3}$

Detta kan sammanfattas med

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ \frac{1-e^{-3t}}{3} & 0 \leq t < 1, . \\ e^{-3t} \cdot \frac{e^3-1}{3} & 1 \leq t \end{cases} \tag{1}$$

Alternativ 2: Insignalen är en linjärkombination av två stegfunktioner:

$$x(t) = u(t) - u(t-1).$$

Det betyder att utsignalen är motsvarande linjärkombination av stegsvaret:

$$y(t) = \mathcal{H}\{x(t)\} = \mathcal{H}\{u(t) - u(t-1)\} = \mathcal{H}\{u(t)\} - \mathcal{H}\{u(t-1)\} =$$
$$= \hat{h}t - \hat{h}(t-1). \tag{2}$$

För att slutföra beräkningarna behöver vi nu systemets stegsvar $\hat{h}(t)$, vilken kan fås genom sambandet $h(t) = \frac{d}{dt}\, \hat{h}(t)$. I intervallet $t < 0$ ger det $\hat{h} =$ konstant och för ett LTI-system måste gälla att konstanten $= 0$. I intervallet $t \geq 0$ får vi istället

$$\hat{h}(t) = -\frac{1}{3}\, e^{-3t} + \text{konstant}.$$

Här måste istället konstanten vara $= \frac{1}{3}$, eftersom $\hat{h}(t)$ är kontinuerlig för $t = 0$ då $h(t)$ inte har en impuls där. Sammanfattningsvis:

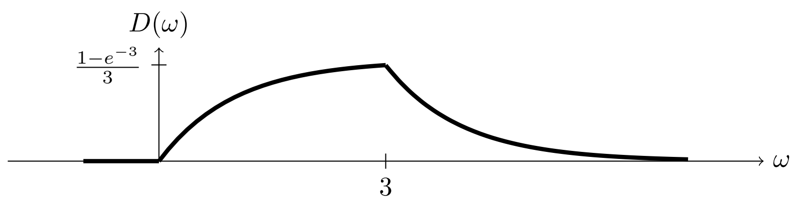
$$\hat{h}(t) = u(t) \cdot \frac{1-e^{-3t}}{3}.$$

Slutligen sätter vi in detta stegsvar i (2), vilket ger utsignalen

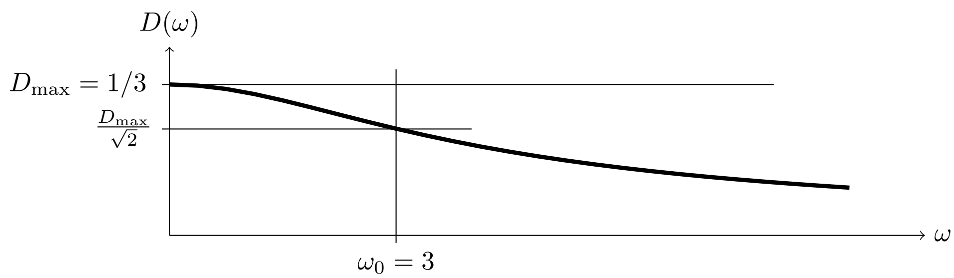
$$y(t) = u(t) \cdot \frac{1-e^{-3t}}{3} - u(t-1) \cdot \frac{1-e^{-3(t-1)}}{3}.$$

Detta uttryck är ett annat sätt att skriva samma utsignal som förekommer i (1).

En plot av utsignalen $y(t)$ visas här:



b. Systemets amplitudkarakteristik ges av $D(\omega) = |H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2+9}}$. För att tydligare se vilken typ av filter systemet motsvarar ritar vi upp denna funktion:



Amplitudkarakteristiken startar med $D(\omega) = \frac{1}{3}$ då $\omega = 0$ och avtar sedan monotont mot 0 då $\omega \to \infty$. Alltså är systemet ett lågpassfilter. Dess gränsfrekvens ω_0 ges av

$D(\omega_0) = D_{\max}/\sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\omega_0^2+9}} = \frac{1}{3\cdot\sqrt{2}} \Rightarrow \omega_0 = 3$ rad/s.

c. För denna signal är vinkelfrekvensen $\omega = 8{,}6$ rad/s, vilket ger

$$H(8{,}6) = \frac{1}{j \cdot 8{,}6 + 3} = \frac{1}{9{,}1\, e^{j1{,}24}} = 0{,}11\, e^{-j1{,}24}.$$

Det innebär att systemet förstärker amplituden för denna signal med faktorn $D(8{,}6) = |H(8{,}6)| = 0{,}11$ och fasen förskjuts med $\psi(8{,}6) = \arg(H(8{,}6)) = -1{,}24$. Utsignalen blir därför

$$y(t) = 0{,}11 \cdot 3{,}4 \cos(8{,}6\, t + 1{,}2 - 1{,}24) = 0{,}373 \cos(8{,}6\, t - 0{,}035).$$