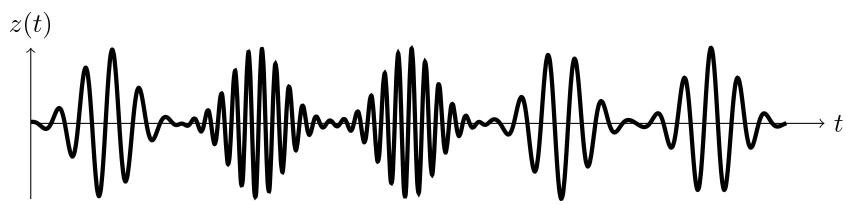
Uppgift 1

RÄTT SVAR	Kommentar
FALSKT	En tidsfördröjning: $y(t) = x(t - \Delta t)$ är ett exempel på ett LTI-system, men det uppfyller inte beskrivningen av tidsinvarians som ges i uppgiften. Utsignalens värde vid tiden t beror inte av insignalens värde vid tiden t, utan vid tiden $t - \Delta t$. Alltså: FALSKT.
SANT	LTI-system har egenskapen ”cosinus in - cosinus ut” och då har in- och utsignal samma frekvens. Se avsnitt 6.1 i kompendiet.
FALSKT	Att ett LTI-system $\mathcal{H}$ är linjärt betyder att om signalen består av en linjärkombination av två signaler, $x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$, då blir systemets utsignal motsvarande linjärkombination deras utsignaler: $y(t) = \mathcal{H}\{x(t)\} = \mathcal{H}\{\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)\} = \alpha_1 \mathcal{H}\{x_1(t)\} + \alpha_2 \mathcal{H}\{x_2(t)\}$. Den utsignal som beskrivs i uppgiften behöver inte alls vara systemets utsignal i detta fall.
FALSKT	Det är impulssvaret som ges av $h(t) = \frac{d}{dt}\hat{h}(t)$.

Uppgift 2

a. Varje sampel motsvaras av $b = 8$ bitar, vilket genererar $b \cdot f_s$ bitar per sekund när signalen samplas med frekvensen f_s. Alltså måste $8 \cdot f_s \leq 100$ kHz, vilket ger $f_s \leq 12{,}5$ kHz.

b. Varje bit motsvaras i den modulerade signalen av en puls som typiskt har en gaussisk envelopp och en frekvens som beror av om biten är noll eller ett. Här antar vi att en nolla motsvaras av en lägre frekvens och en etta av högre frekvens.



Uppgift 3

a. Vi kan bestämma utsignalen genom att sätta in värdena för impulssvaret h och den kända insignalen x i uttrycket för $y[k]$:

$$
\begin{aligned}
y[k] &= h[0]\,x[k] + h[1]\,x[k-1] = 1 \cdot x[k] + 1 \cdot x[k-1] = \\
&= 0{,}8\cos(5{,}2\,k - 1{,}4) + 0{,}8\cos(5{,}2\,(k-1) - 1{,}4) = \\
&= 0{,}8\cos(5{,}2\,k - 1{,}4) + 0{,}8\cos(5{,}2\,k - 6.6) = \\
&= 0{,}8\big(\cos(5{,}2\,k)\cos(1{,}4) + \sin(5{,}2\,k)\sin(1{,}4)\big) + \\
&\qquad + 0{,}8\big(\cos(5{,}2\,k)\cos(6{,}6) + \sin(5{,}2\,k)\sin(6{,}6)\big) = \\
&= 0{,}9\cos(5{,}2\,k) + 1{,}04\sin(5{,}2\,k) = \\
&= \sqrt{0{,}9^2 + 1{,}04^2}\,\cos(5{,}2\,k - \operatorname{atan2}(1{,}04, 0{,}9)) = \\
&= 1{,}37\,\cos(5{,}2\,k - 0{,}86)
\end{aligned}
$$

b. $y[k] = \mathcal{H}\{x[k]\} = h[0]\,x[k] + h[1]\,x[k-1] \quad \Rightarrow$
$H(\omega) = h[0] + h[1]\,e^{-j\omega\,T_s} = 1 + e^{-j\omega T_s}$.

Här har vi använt oss av att frekvensfunktionen för en tidsfördröjning med Δt ges av $e^{-j\omega\Delta t}$ (kompendiet 6.4.2). Vidare ges frekvensfunktionen av en linjärkombination av två termer i systemoperatorn som motsvarande linjärkombination av termernas frekvensfunktioner (kompendiet 6.3.2). Slutligen att avståendet mellan två sampel ges av T_s = samplingsperioden.

Nu när vi har bestämt $H(\omega)$ kan vi även enkelt kontrollera deluppgift a) genom att bestämma hur systemet påverkar en cosinussignal med vinkelfrekvens $\omega = 5{,}2/T_s$ rad/s. Vi får $H(5{,}2/T_s) = 1 + e^{-5{,}2j} = 1{,}47 + 0{,}88j$, vilket ger $D(5{,}2) = |H(5{,}2)| = |1{,}47 + 0{,}88j| = 1,71$ och $\psi(5{,}2) = \arg H(5{,}2) = \text{atan2}(0{,}88, 1{,}47) = 0{,}54$ rad. Det ger utsignalen

$y[k] = 1{,}71 \cdot 0{,}8 \cos(5{,}2k - 1{,}4 + 0{,}54) = 1{,}37 \cdot \cos(5{,}2k - 0{,}86)$.

Uppgift 4

a. Samplingsperioden blir $T_s = \frac{1}{f_s} = 0{,}01$ s. Vid ideal sampling ges $s[k]$ av

$$\begin{aligned} s[k] = s(T_s\,k) &= 8{,}2\cos(426\,T_s k + 1{,}6) + 4{,}2\cos(738\,T_s k - 0{,}8) = \\ &= 8{,}2\cos(4{,}26\,k + 1{,}6) + 4{,}2\cos(7{,}38\,k - 0{,}8) \end{aligned}$$

b. $f_s = 100 \Rightarrow \omega_s = 2\pi f_s = 628$ rad/s. Det ger Nyquist-frekvensen $\omega_N = \frac{1}{2}\omega_s = 314$ rad/s. Alla frekvenskomponenter som ligger över denna frekvens kommer att "vikas ned" efter ideal rekonstruktion. De ska då hamna på en frekvens som är en heltalsmultipel av ω_s från ursprungsfrekvensen där heltalet väljs så att resultatet ligger innanför Nyquist-frekvensen.

Den första frekvenskomponenten har frekvensen $\omega_1 = 426$ rad/s vilket är över ω_N. Med heltalsmultipeln 1 fås den nedvikta frekvensen $\omega_1' = \omega_1 - 1 \cdot \omega_s = 426 - 628 = -202$ rad/s. Denna frekvens har ett belopp $< \omega_N$, men eftersom ω_1' är negativt ska både frekvesnen och fasen byta tecken i motsvarande frekvenskomponent i s_{rek}.

Den andra frekvenskomponenter har frekvensen $\omega_2 = 738$ rad/s, vilket även det är över ω_N. Med heltalsmultipeln 1 fås den nedvikta frekvensen $\omega_2' = \omega_2 - 1 \cdot \omega_s = 738 - 628 = 110$ rad/s. Eftersom ω_2' landar på ett positivt värde ska fasen inte byta tecken.

Sammanfattningsvis kan den rekonstruerade signalen uttryckas som

$$s_{\text{rek}}(t) = 8{,}2\cos(202\,t - 1{,}6) + 4{,}2\cos(110\,t - 0{,}8).$$

Uppgift 5

a. Kapacitansen har en impedans på $Z_C = \frac{1}{j\omega C}$. Utsignalens komplexa amplitud $\hat{Y}$ fås genom spänningsdelning av insignalens komplexa amplitud $\hat{X}$:

$$\hat{Y} = \hat{X} \cdot \frac{R}{R + Z_C} = \hat{X} \cdot \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \hat{X} \cdot \frac{j\omega RC}{j\omega RC + 1}$$

Motsvarande frekvensfunktion blir då

$$H(\omega) = \frac{\hat{Y}}{\hat{X}} = \frac{j\omega RC}{j\omega RC + 1} = \frac{j\omega \cdot 1500 \cdot 4,7 \cdot 10^{-9}}{j\omega \cdot 1500 \cdot 4,7 \cdot 10^{-9} + 1} = \frac{j\omega \cdot 7 \cdot 10^{-6}}{j\omega \cdot 7 \cdot 10^{-6} + 1}$$

Rimlighetskontroll: För $\omega = 0$ fungerar kapacitansen som ett avbrott, dvs. då blir $y(t) = 0$. För mycket höga frekvensen fungerar kapacitansen som en kortslutning, dvs. då blir $y(t) = x(t)$. Detta stämmer med frekvensfunktionen som erhålls: $H(0) = 0$ och $H(\infty) = 1$.

Uppgift 6

a. Det finns (minst) två sätt att bestämma stegsvaret $\hat{h}(t)$ för detta system.

Alternativt 1: Stegsvaret ges av utsignalen när insignalen är ett enhetssteg: $\hat{h}(t) = \mathcal{H}\{u(t)\}$, dvs. $\hat{h}(t)$ fås genom att falta impulssvaret $h(t)$ med $u(t)$. För att beräkna $(h * u)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau$ behöver vi betrakta två fall:

Fall 1: $t \leq 0$. I det här fallet har $h(t-\tau)$ och $u(\tau)$ inget överlapp där båda är nollskilda. Alltså är $(h * u)(t) = 0$ när $t \leq 0$.

Fall 2: $t > 0$. I det här fallet är $h(t-\tau)$ och $u(\tau)$ båda två nollskilda i intervallet $[0, t]$. Det ger

$$(h * u)(t) = \int_0^t e^{-3(t-\tau)} \cdot 1 \cdot d\tau = e^{-3t} \int_0^t e^{3\tau} \cdot 1 \cdot d\tau = e^{-3t} \left[\frac{1}{3} e^{3\tau}\right]_{\tau=0}^{\tau=t} =$$

$$= \frac{e^{-3t}}{3}(e^{3t} - 1) = \frac{1}{3}\left(1 - e^{-3t}\right).$$

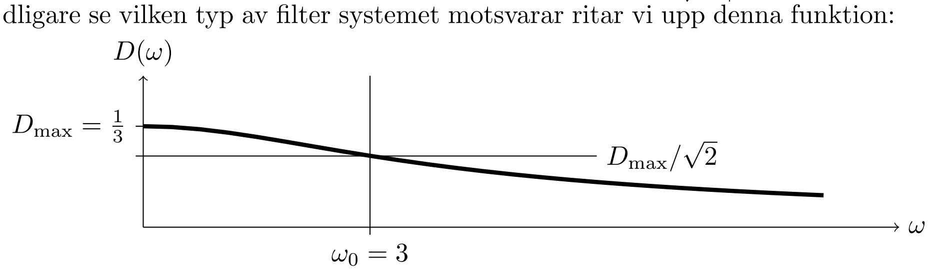
Alltså är $(h * u)(t) = \frac{1}{3}\left(1 - e^{-3t}\right)$ när $t > 0$.

De två fallen kan sammanfattas med $\hat{h}(t) = u(t) \cdot \frac{1}{3}\left(1 - e^{-3t}\right)$.

Alternativt 2: Sambandet mellan impulssvar stegsvar ges av $h(t) = \frac{d}{dt}\hat{h}(t)$. Vi söker alltså en funktion $\hat{h}(t)$ sådan att dess derivata ges av $h(t)$. Eftersom $h(t) = 0$ för $t \leq< 0$ måste $\hat{h}(t) =$ konstant för $t \leq 0$. Eftersom systemet är kausalt så är konstanten $= 0$. För $t > 0$ söker vi en primitiv funktion till $h(t) = e^{-3t}$, vilket ger $\hat{h}(t) = -\frac{1}{3}e^{-3t} + C$ där C är en konstant. Eftersom $h(t)$ har ett ändligt värde vid $t = 0$ måste $\hat{h}(t)$ vara kontinuerlig vid $t = 0$, alltså är $\hat{h}(t) = 0$ när $t = 0$. Det ger $C = \frac{1}{3}$.

Sammanfattningsvis: $(h * u)(t) = \frac{1}{3}\left(1 - e^{-3t}\right)$ när $t > 0$

b. Systemets amplitudkarakteristik ges av $D(\omega) = |H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2+9}}$. För att tydligare se vilken typ av filter systemet motsvarar ritar vi upp denna funktion:



Amplitudkarakteristiken har ett max-värde $D_{\max} = 1/3$ för $\omega = 0$ och sedan avtar funktionen mot noll, alltså är systemet ett lågpassfilter. Dess gränsfrekvens ω_0 ges av $D(\omega_0) = D_{\max}/\sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\omega_0^2+9}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \Rightarrow \omega_0 = 3$ rad/s.

c. För denna signal är vinkelfrekvensen $\omega = 8{,}6$ rad/s, vilket ger

$$H(8{,}6) = \frac{1}{j \cdot 8{,}6 + 3} = \frac{1}{9{,}1\, e^{j1{,}24}} = 0{,}11\, e^{-j1{,}24}.$$

Det innebär att för denna frekvens förstärks signalens amplitud med $D(8{,}6) = |H(8{,}6)| = 0{,}11$ och fasen förskjuts med $\psi(8{,}6) = \arg(H(8{,}6)) = -1{,}24$. Utsignalen blir därför

$$y(t) = 0{,}11 \cdot 3{,}4 \cos(8{,}6t + 1{,}2 - 1{,}24) = 0{,}37 \cos(8{,}6t - 0{,}04).$$