Försättsblad till skriftlig tentamen vid Linköpings universitet

Datum för tentamen	2017-01-07
Sal (2)	G33(1) TER4(63)
Tid	8-12
Kurskod	TSBB16
Provkod	TEN2
Kursnamn/benämning **Provnamn/benämning**	Grundläggande systemmodeller Skriftlig tentamen
Institution	ISY
Antal uppgifter som ingår i tentamen	6
Jour/Kursansvarig Ange vem som besöker salen	Klas Nordberg
Telefon under skrivtiden	013-281634
Besöker salen ca klockan	10
Kursadministratör/kontaktperson (namn + tfnr + mailaddress)	Carina Lindström 4423 carina.e.lindstrom@liu.se
Tillåtna hjälpmedel	Räknedosa med rensat minne
Övrigt	Visning av tentor sker 2017-01-26, 12:15-13:00 i konferensrummet Algoritmen som ligger i hus B, A-korridoren nära ingång 29.
Antal exemplar i påsen	

Anvisningar för TSBB16/TEN2

Tentamen består av 6 uppgifter som var och en innehåller deluppgifter som kan ge olika antal poäng. Se även speciella anvisningar för uppgift 1.

Totalt kan tentamen ge maximalt 20 poäng.

För betyg 3 krävs minst 9 poäng.

För betyg 4 krävs minst 13 poäng.

För betyg 5 krävs minst 17 poäng.

I samtliga uppgifter, utom uppgift 1, ska svaret/lösningen motiveras. Bristande motivering medför poängavdrag.

Skriv ditt anonyma identitetsnummer (AID) överst på varje sida i skrivningen.

Tillåtna hjälpmedel: räknare med rensat minne.

Gör rimliga avrundningar av numeriska värden i dina svar.

Om numeriska värden anges på parametrar eller komponenter i uppgiften ska dessa användas i formuleringen av svaret.

Lösningsförslag kommer normalt att publiceras inom 5 arbetsdagar efter tentamenstillfället.

Lycka till!
Klas Nordberg

Uppgift 1 I nedanstående tabell finns fyra påståenden relaterade till innehållet i kursen. Ange för vart och ett av påståendena om det är sant eller falsk genom att kryssa i motsvarande ruta på samma rad. Korrekt svar på en deluppgift ger +1 poäng, felaktigt svar -1 poäng, medan utelämnat svar ger 0 poäng. *Du ska inte lämna någon motivering till ditt svar.*

PÅSTÅENDE	SANT	FALSKT
Ett tidsdiskret LTI-system med samplingsperioden T_s har alltid en frekvensfunktion $H(\omega)$ som är frekvensdiskret, vilket betyder att den har väldefinierade värden endast då ω är en heltalsmultipel av $\frac{2\pi}{T_s}$.		
Ett tidsinvariant system behöver inte vara linjärt, men ett linjärt system måste alltid vara tidsinvariant.		
Ett LTI-system som går att realisera i verkligheten måste alltid vara kausalt, vilket betyder att dess impulssvar $h(t)$ uppfyller $h(t) = 0$ då $t < 0$.		
Kirchhoffs strömlag (KCL) är en konsekvens av att elektrisk laddning inte kan skapas eller förstöras i elektriska kretsar.		

Uppgift 2 En specifik kanal har kapacitet att överföra 705600 bitar per sekund. En tidskontinuerlig signal $s(t)$ samplas med b bitar per sampel och samplingsfrekvensen f_s. Två olika samplingssystem, A och B, används för denna kanal, de har följande parametrar som bestämmer hur samplingen utförs:

A: $b = 16$ bitar per sampel och $f_s = 44,1$ kHz.

B: $b = 12$ bitar per sampel och $f_s = 58,8$ kHz.

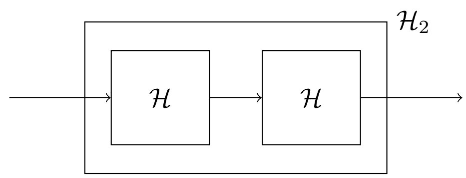
Bestäm hur höga frekvenser $s(t)$ kan innehålla utan att vikning uppstår för respektive system. Ange även hur de två samplingssystemen skiljer sig åt vad gäller hur mycket brus som uppstår vid samplingen när signalerna kvantiseras. (2p)

Uppgift 3 Ett tidsdiskret LTI-system $\mathcal{H}$ har ett impulssvar $h[k]$ som representeras av filtervektorn $\mathbf{h} = [\,1\;\;1\,]$. Dess utsignal $y[k]$ ges alltså av

$$y[k] = (h * x)[k] = \sum_{l=0}^{1} h[l]\, x[k-l],$$

där $h[0] = h[1] = 1$.

Ett annat system $\mathcal{H}_2$ består av två kopior av systemet $\mathcal{H}$ som är kaskadkopplade, se nedanstående figur. Bestäm impulssvaret $h_2[k]$ för $\mathcal{H}_2$. (2p)

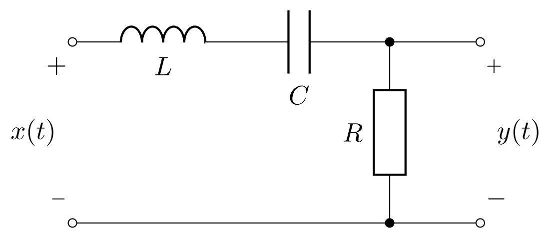


Uppgift 4 En tidskontinuerlig signal $s(t)$ består av två frekvenskomponenter:

$$s(t) = 6{,}3\cos(538\,t + 0{,}42) + 2{,}6\cos(2470\,t - 0{,}55).$$

Signalen $s(t)$ samplas idealt med samplingsfrekvensen $f_s = 250$ Hz, vilket ger den tidsdiskreta signalen $s[k]$. Från $s[k]$ återskapas en tidskontinuerlig signal $s_{\text{rek}}(t)$ genom ideal rekonstruktion. Bestäm ett uttryck för $s_{\text{rek}}(t)$. (2p)

Uppgift 5 Nedanstående figur visar en elektrisk krets som utgör ett LTI-system. Dess insignal är spänningen $x(t)$ och utsignal är spänningen $y(t)$.



$R = 1{,}5$ kΩ

$L = 2{,}2$ mH

$C = 4{,}7$ nF

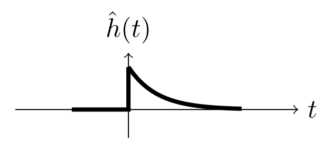
a. Rita motsvarande komplexa kretsschema. (1p)

b. Använd $j\omega$-metoden för att bestämma kretsens frekvensfunktion $H(\omega)$. (2p)

c. Ange vad $H(\omega)$ blir för frekvenser nära 0 respektive för mycket höga frekvenser. (1p)

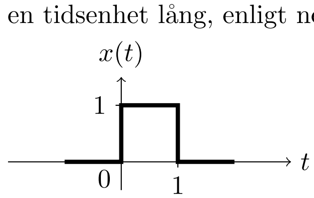
Uppgift 6 Ett LTI-system $\mathcal{H}$ har ett stegsvar $\hat{h}(t)$ som beskrivs med uttrycket

$$\hat{h}(t) = \mathcal{H}\{u(t)\} = u(t) \cdot e^{-3t}.$$



Systemet har en frekvensfunktion $H(\omega) = \frac{j\omega}{j\omega+3}$.

a. Bestäm systemets utsignal $y(t)$ då dess insignal $x(t)$ utgörs av en puls som är en tidsenhet lång, enligt nedanstående figur. (2p)



,

b. Systemet används som ett frekvensselektivt filter. Vilken typ av filter är det? Vilken gränsfrekvens har det? (2p)

c. Systemet får en insignal $x(t) = 3{,}4\cos(8{,}6\,t + 1{,}2)$. Vad blir systemets utsignal $y(t) = \mathcal{H}\{x(t)\}$ i detta fall? (2p)

Uppgift 1

RÄTT SVAR	Kommentar
FALSKT	Det är snarare så att frekvensfunktionen $H(\omega)$ till ett tidsdiskret system alltid är periodisk med perioden $\frac{2\pi}{T_s}$.
FALSKT	Egenskaperna "linjärt" och "tidsinvariant" är helt oberoende, ett system kan vara linjärt utan att vara tidsinvariant. Ett exempel är en tidsvariabel förstärkare.
SANT	Impulssvaret för ett verkligt system kan inte vara nollskilt innan impulsen kommer, dvs. vid $t = 0$. Alltå: SANT.
SANT	Ström är laddning som rör på sig och eftersom laddning inte kan skapas eller förstöras måste dessa två summor vara lika. Kirchhoffs strömlag innebär att summan av ström som flyter in till en punkt är lika med summan av ström som flyter ut ur samma punkt och måste gälla om inte laddning kan skapas eller förstöras.

Uppgift 2 System A har en samplingsfrekvens $f_s = 44,1$ kHz och motsvarande Nyquist-frekvens är $f_N = \frac{1}{2} f_s = 22,1$ kHz. Detta är den högsta frekvenskomponent som s(t) kan innehålla utan att vikning uppstår. Motsvarande frekvens för system B är $\frac{1}{2} \cdot 58,8 = 29,4$ kHz. System B kan alltså överföra signaler med något högre frekvenskomponenter än vad system A kan göra.

System A samplar med 16 bitar och system B samplar med 12 bitar. Eftersom kvantiseringsbruset är proportionellt mot 2^{-b} betyder det att system B har ett kvantiseringsbrus som är en faktor 16 gånger högre än för system A.

Uppgift 3 Denna uppgift kan lösas på (minst) två olika sätt.
Alternativ 1: Impulssvaret för $\mathcal{H}_2$ fås som $h_2[k] = \mathcal{H}_2\{\delta[k]\} = \mathcal{H}\{\mathcal{H}\{\delta[k]\}\} = \mathcal{H}\{h[k]\}$. Vi behöver alltså undersöka vad systemet $\mathcal{H}$ ger för utsignal när insignalen är $h[k] = \delta[k] + \delta[k-1]$. I detta fall ger det:

$$\begin{aligned} h_2[k] &= h[0] \cdot h[k] + h[1] \cdot h[k-1] = \\ &= 1 \cdot \big(\delta[k] + \delta[k-1]\big) + 1 \cdot \big(\delta[k-1] + \delta[k-2]\big) = \\ &= \delta[k] + 2 \cdot \delta[k-1] + \delta[k-2] \end{aligned}$$

Impulssvaret representeras av filtervektorn $\mathbf{h}_2 = [\,1\;\;2\;\;1\,]$.

Alternativ 2: Frekvensfunktionen för $\mathcal{H}$ är $H(\omega) = 1 + e^{-j\omega}$. Det kaskadkopplade systemet $\mathcal{H}_2$ har frekvensfunktionen $H_2(\omega) = \mathcal{H}(\omega) \cdot H(\omega) = 1 + 2e^{j\omega} + e^{2j\omega}$. Motsvarande impulssvar för det system som har frekvensfunktionen $H_2(\omega)$ är

$$h_2[k] = \delta[k] + 2 \cdot \delta[k-1] + \delta[k-2]$$

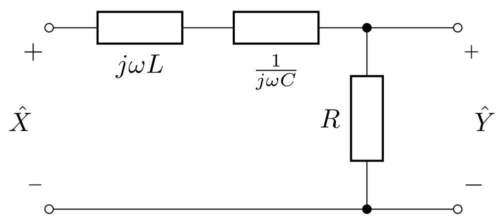
Uppgift 4 Samplingsfrekvensen $f_s = 250$ Hz motsvarar Nyquist-frekvensen $f_N = 120$ Hz eller $\omega_N = 2\pi f_N = 785{,}4$ rad/s. Alla frekvenser över Nyquist-frekvensen utsätts för vikning vid ideal sampling och rekonstruktion. Signalens första frekvenskomponent ligger under Nyquist-frekvensen och bevaras alltså intakt efter rekonstruktionen. Den andra komponenten i signalen har en frekvens ω ligger över Nyquist-frekvensen och viks ned till en frekvens $\omega' = \omega - n \cdot \omega_s$ så att $|\omega'| \leq \omega_N$, där n är ett heltal. I detta fall, för $n = 2$, får vi $\omega' = \omega - 2 \cdot \omega_s = 2470 - 2 \cdot 2\pi \cdot 250 = -671{,}5$

rad/s. Efter ideal rekonstruktion får vi alltså signalen

$$\begin{aligned} s_{\text{rek}}(t) &= 6{,}3\cos(538\,t + 0{,}42) + 2{,}6\cos(-671{,}5\,t - 0{,}55) = \\ &= 6{,}3\cos(538\,t + 0{,}42) + 2{,}6\cos(671{,}5\,t + 0{,}55) \end{aligned}$$

Uppgift 5

a. Det komplexa kretsschemat fås genom att ersätta varje komponent med motsvarande impedans och att ersätta de tidberoende in- och utsignalerna med motsvarande komplexa amplituder.

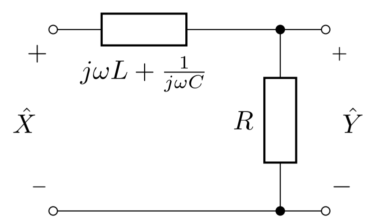


$R = 1{,}5$ kΩ

$L = 2{,}2$ mH

$C = 4{,}7$ nF

b. Kretsen utgör en spänningsdelare:



Spänningen $\hat{Y}$ ges därför av

$$\hat{Y} = \frac{R}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} \cdot \hat{X}$$

Systemets frekvensfunktion ges av

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{\hat{Y}}{\hat{X}} = \frac{R}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{\hat{Y}}{\hat{X}} = \frac{j\omega RC}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC} = \\ &= \frac{j\omega \cdot 7{,}1 \cdot 10^{-6}}{1 - \omega^2 \cdot 1{,}0 \cdot 10^{-11} + j\omega \cdot 7{,}1 \cdot 10^{-6}} \end{aligned}$$

Uppgift 6

a. Det flera sätt att bestämma utsignalen $y(t)$ för detta system.

Alternativt 1: Insignalen $x(t)$ består av en linjärkombination av stegfunktioner:

$$x(t) = u(t) - u(t-1).$$

Motsvarande utsignal för ett LTI-system blir därför

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{H}\big\{x(t)\big\} = \mathcal{H}\big\{u(t) - u(t-1)\big\} = \\ &= \mathcal{H}\big\{u(t)\big\} - \mathcal{H}\big\{u(t-1)\big\} = \\ &= \hat{h}(t) - \hat{h}(t-1) = u(t) \cdot e^{-3t} - u(t-1) \cdot e^{-3(t-1)}. \end{aligned}$$

Alternativt 2: Bestäm utsignalen som faltningen mellan stegsvaret $\hat{h}$ och insignalens tidsderivata $\frac{dx}{dt}$ (se kompendiet avsnitt 4.1.2). Insignalens tidsderivata ges av

$$\frac{d}{dt}x(t) = \delta(t) - \delta(t-1),$$

alltså en impuls vid $t = 0$ och en (negativ) impuls vid $t = 1$. Utsignalen blir därför

$$\begin{aligned} y(t) &= \left(\hat{h} * \frac{d}{dt}x\right)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(t-\tau)\frac{d}{dt}x(\tau)\,d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(t-\tau)\big(\delta(\tau) - \delta(\tau-1)\big)\,d\tau = \hat{h}(t) - \hat{h}(t-1) = \\ &= u(t)\cdot e^{-3t} - u(t-1)\cdot e^{-3(t-1)}. \end{aligned}$$

Alternativt 3: Bestäm utsignalen som faltningen mellan impulssvaret h och insignalen x. Vi behöver då först bestämma systemets impulssvar, exempelvis som tidsderivatan av dess stegsvar.

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{d}{dt}\hat{h}(t) = \frac{d}{dt}\left(u(t)\cdot e^{-3t}\right) = \\ &= \left(\frac{d}{dt}u(t)\right)\cdot e^{-3t} + u(t)\cdot\frac{d}{dt}e^{-3t} = \\ &= \delta(t)\cdot e^{-3t} - 3\cdot u(t)\cdot e^{-3t} = \delta(t) - 3\cdot u(t)\cdot e^{-3t} \end{aligned}$$

Utsignalen $y(t)$ fås nu som faltningen mellan $h(t)$ och $x(t)$:

$$\begin{aligned} y(t) &= (h * x)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\cdot x(t-\tau)\,d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\delta(\tau) - 3\cdot u(\tau)\cdot e^{-3\tau}\right)\cdot x(t-\tau)\,d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)\cdot x(t-\tau)\,d\tau - 3\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\cdot e^{-3\tau}\cdot x(t-\tau)\,d\tau = \\ &= x(t) - \underbrace{3\int_{t-1}^{t} u(\tau)\cdot e^{-3\tau}\,d\tau}_{=I}. \end{aligned}$$

Integralen I i detta uttryck behöver beräknas för tre olika fall:

• $t < 0$: I detta fall är $I = 0$ eftersom stegfunktionen i integranden är $= 0$ för alla τ i intervallet $-1 < \tau < 0$.

• $0 \leq t < 1$: I detta fall ges I av

$$I = 3\int_{0}^{t} e^{-3\tau}\,d\tau = \left[-e^{-3\tau}\right]_{\tau=0}^{\tau=t} = \left(1 - e^{-3t}\right).$$

• $1 \leq t$: I detta fall ges I av

$$I = 3\int_{t-1}^{t} e^{-3\tau}\,d\tau = \left[-e^{-3\tau}\right]_{\tau=t-1}^{\tau=t} = \left(e^{-3(t-1)} - e^{-3t}\right).$$

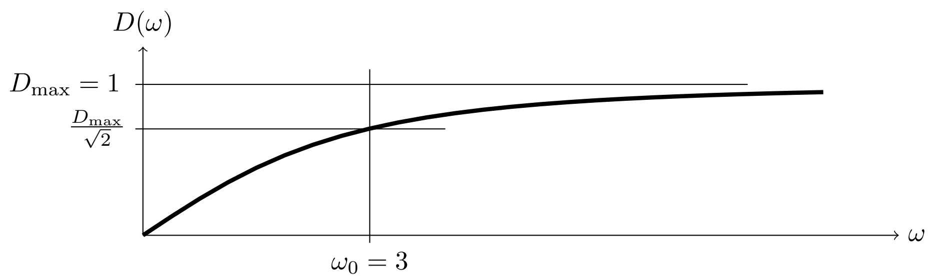
Vi kan nu undersöka $y(t)$ för de tre fallen:

• $t < 0$: $y(t) = 0 - 0 = 0$.

- $0 \leq t < 1$: $y(t) = 1 - \left(1 - e^{-3t}\right) = e^{-3t}$.
- $1 \leq t$: $y(t) = 0 - \left(e^{3} - 1\right)\, e^{-3t} = e^{-3t} - e^{-3(t-1)}$.

Detta kan sammanfattas med $y(t) = u(t)e^{-3t} - u(t-1)e^{-3(t-1)}$.

b. Systemets amplitudkarakteristik ges av $D(\omega) = |H(\omega)| = \frac{|\omega|}{\sqrt{\omega^2+9}}$. För att tydligare se vilken typ av filter systemet motsvarar ritar vi upp denna funktion:



Amplitudkarakteristiken startar med $D(\omega) = 0$ då $\omega = 0$ och växer sedan mot sitt max-värde 1 då $\omega \to \infty$. Alltså är det ett högpassfilter. Dess gränsfrekvens ω_0 ges av

$D(\omega_0) = D_{\max}/\sqrt{2} \Rightarrow \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2+9}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \omega_0 = 3$ rad/s.

c. För denna signal är vinkelfrekvensen $\omega = 8{,}6$ rad/s, vilket ger

$$H(8{,}6) = \frac{j \cdot 8{,}6}{j \cdot 8{,}6 + 3} = \frac{8{,}6\, e^{j\pi/2}}{9{,}1\, e^{j1{,}24}} = 0{,}944\, e^{j0{,}336}.$$

Det innebär att systemet förstärker amplitud för denna signal med faktorn $D(8{,}6) = |H(8{,}6)| = 0{,}944$ och fasen förskjuts med $\psi(8{,}6) = \arg(H(8{,}6)) = 0{,}336$. Utsignalen blir därför

$$y(t) = 0{,}944 \cdot 3{,}4 \cos(8{,}6t + 1{,}2 + 0{,}336) = 3{,}21 \cos(8{,}6t + 1{,}54).$$